Interrogation n°25. Corrigé

Exercice A

1) Par le th de Schwarz, on a $\forall x,\ g(x) = \int_c^d \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\ dy = \int_c^d \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\ dy = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,d) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,c)$.
Donc $\int_a^b g(x)\ dx = (f(b,d) - f(a,d)) - (f(b,c) - f(a,c))$, d'où le résultat.

2) Comme $[-1,1]$ est compact et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ continue, il existe $M = \sup_{[-1,1]^2} \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|$.
Par 1), $\delta(x,y) = |f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)| = \left|\int_0^x \left(\int_0^y \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u,v)\ dv\right)\ du\right|$.
En appliquant deux fois l'inégalité triangualire, on obtient bien $\delta(x,y) \leq \int_{[0,x]} \int_{[0,y]} M\ dv\ du = M\ \ |xy|$.

Exercice B

1) On vérifie que la série des dérivées $\sum -\dfrac{\ln n}{n^x}$ converge normalement sur tout $[a,+\infty[$, où $a > 1$.

2) On a $q_n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n = 1$, donc on définit bien une loi Q sur $\mathbb{N}^*$.

3) On a $P(A_d) = \sum_{n=1}^{+\infty}(X = nd) = \dfrac{1}{\zeta(x)} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(dn)^x} = \dfrac{1}{d^x}$.

a) Soient $A_{p_1}, ..., A_{p_r}$ une sous-famille FINIE de $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$, c'est-à-dire $p_1, ..., p_r$nombres premiers distincts.

On a $p_1, ..., p_r$ divise n ssi $d = p_1 ... p_r = \text{ppcm}(p_1, ..., p_r)$ divise n.

Donc $A_{p_1} \cap ... \cap A_{p_r} = A_d$, et on a $P(A_{p_1} \cap ... \cap A_{p_r}) = \dfrac{1}{d^x} = \dfrac{1}{p_1^x} ... \dfrac{1}{p_r^x} = P(A_{p_1})P(A_{p_2})...P(A_{p_r})$.
Donc les A_p, où $p \in \mathcal{P}$ sont mutuellement indépendants.

b) Les $\overline{A_{p_n}}$ sont indépendants, donc $P\left(\bigcap_{n=1}^N \overline{A_{p_n}}\right) = \prod_{n=1}^N P(\overline{A_p}) = \prod_{n=1}^N \left(1 - \dfrac{1}{p_n^x}\right)$.
Par continuité décroissante, on a donc $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{p_n^x}\right)$.
Or, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}} = \{1\}$, donc $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{A_{p_n}}\right) = \dfrac{1}{\zeta(x)}$. Donc $\zeta(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{1 - 1/p_n^x}\right)$.

4) On a $(\text{pgcd}(X,Y) \neq 1) = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} B_p$, où $B_p : p$ divise X et Y.
On a $P(B_p) = P(A_d)^2$ car X et Y sont indépendantes. Donc $P(B_p) = \dfrac{1}{p^{2x}}$.
Comme au 3), on montre que les B_p sont indépendants.
Et on en déduit que $P((\text{pgcd}(X,Y) = 1)) = P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{B_p}) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{p_n^{2x}}\right) = \dfrac{1}{f(2x)}$.

Exercice C

1) On pose $z = \rho e^{i\theta}$. On a $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1-\overline{z}}{|1-z|^2}$, donc $\text{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1 - \text{Re}(\overline{z})}{|1-z|^2} \geq \dfrac{1-|z|}{|1-z|^2} > 0$.

2) On a $\dfrac{1}{1 - ze^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{in\theta}$. La série de fonctions $\theta \longmapsto \sum z^n e^{in\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

On peut intégrer terme à terme, et ainsi $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} z^n e^{in\theta}\ d\theta = 2\pi + 0 = 2\pi$.
On a $\dfrac{1}{z - e^{i\theta}} = \dfrac{-e^{i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}} = -\sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{i(n+1)\theta}$. Par le même argument, on obtient donc $B(z) = 0$.

On a $\dfrac{1 - \rho\cos\theta}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2} = \dfrac{1 - \rho\cos\theta}{(1 - \rho\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \text{Re}\left(\dfrac{1}{1 - \rho e^{i\theta}}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-\rho e^{i\theta}} + \dfrac{1}{1 - \rho e^{-i\theta}}\right)$.
D'où $C(z) = 2\pi$.

Exercice D

1) Par définition de R, pour $\rho < R$, la suite $(\rho^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe M telle que $|a_n| \leq \dfrac{M}{\rho^n}$.

On considère alors $\mu = \max\left(M, \dfrac{1}{\rho}\right)$.

2) On vérifie par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leq \mu^n$.

La série $\sum \mu^n x^n$ est de rayon $\dfrac{1}{\mu}$, donc par comparaison $R' \geq \dfrac{1}{\mu}$.

3) Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{\mu}, \dfrac{1}{\mu}\right[$. On a $R' \geq \dfrac{1}{\mu}$ et $a_n = O(\mu^n)$, donc $|x| < \min(R, R')$.

On a $g'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k} = f'(x)g(x)$ par produit de Cauchy.

Donc $g(x) = g(0)\exp(F(x))$ et comme $g(0) = b_0 = 1$, on a bien $g(x) = \exp(F(x))$.

4) Si f est DSE sur $]-R, R[$, avec $R > 0$, alors f' est DSE sur $]-R, R[$.

On applique ce qui précède à la série entière $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Il existe donc g DSE de rayon $R' > 0$ tel que au voisinage de 0, $\exp(f(x)) = g(x)$.

5) On a $g(x) = \exp(e^x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(nx)^p}{n!p!}$.

Tous les termes sont positifs et les séries convergent, donc par Fubini,

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p$, où $b_p = \dfrac{1}{p!}\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^p}{n!}$.

Exercice E

1) a) $0 \leq Y^s \leq \max(1, Y^r) \leq 1 + Y^r$. Comme $1 + Y^r$ est d'espérance finie, Y^s est d'espérance finie.

b) La fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}\ x \longmapsto x^s$ est convexe, car $f''(x) = s(s-1)x^{s-2} \geq 0$.

Donc $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq f(m) + (x-m)f'(m)$, c'est-à-dire f au-dessus de sa tangente en m.

On prend $x = Y(\omega)$ et $m = E - Y)$. Donc $Y^s \geq E(Y)^s \geq sE(Y)^{s-1}(Y - E(Y))$.

c) Par par linéarité de l'espérance, on obtient $E(Y^s) - E(Y)^s = sE(Y)^{s-1}(E(Y) - E(Y)) = 0$.

Donc $E(Y^s) \geq E(Y)^s$.

2) Soient $1 \leq s \leq t$. On applique 1) à $Y = X^s$.

On a $E(Y^{t/s}) \geq E(Y)^{t/s}$, c'est-à-dire $E(X^t) \geq E(X^s)^{t/s}$, donc $f(t) \geq f(s)$.

Exercice F

1) Supposons que P n'est pas scindé.

Alors P admet une racine complexe non réelle z. On a $|P(z)| = 0 < |\mathrm{Im}\, z|^n \neq 0$.

Réciproquement, supposons que $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ scindé sur $\mathbb{R}$, où $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|P(z)| = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}|z - a_i| \geq \prod_{i=1}^{n}|\mathrm{Im}(z - a_i)| = \prod_{i=1}^{n}|\mathrm{Im}(z)| = |\mathrm{Im}\, z|^n$. D'où le résultat.

2) a) **Remarque :** En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et la convergence correspond à la convergence coefficients par coefficient dans toute base. Ici, on considère la base canonique de E_n. Ainsi, la convergence des polynômes correspond à la convergence des suites de leurs coefficients.

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes appartenant à E_n convergeant (coefficient par coefficient) vers P.

En particulier P est unitaire et de degré n. Il reste à prouver que P est scindé.

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|P_k(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n$, donc par passage à la limite, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n$.

(*Remarque* : en effet, l'application $Q \longmapsto Q(z)$ est continue, de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{C}$).

On a donc $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n$, ce qui permet de conclure avec 1) b) que P est scindé.

Ainsi E_n est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2) b) Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique χ_A est scindé, donc ssi $\chi_A \in E_n$.

Or, l'application $A \longmapsto \chi_A(x) = \det(xI_n - A)$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans E_n :

En effet, on prouve d'abord par récurrence qu'un déterminant est une expression polynomiale des coefficients ; ici, on en déduit que $\chi_A(x)$ est une expression polynomiale en les a_{ij} et les $x - a_{ii}$, dont on en déduit que les coefficients de $\chi_A(x)$ sont des expressions polynomiales en les coefficients de A, et donc a fortiori (via la caractérisation séquentielle) des fonctions continues par rapport à A.

Donc pour toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices trigonalisables convergente vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la suite des polynômes ccaractéristique $(\chi_{A_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers χ_A.

Par a), χ_A est scindé. Donc A est trigonalisable.

On en déduit donc que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé.