**Interrogation n°25**

**Exercice A**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ \ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ une fonction de classe $C^2$.

**1)** [1.5 pt] Montrer que pour tous $a \leq b$ et $c \leq d$, on a

$$f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c) = \int_a^b g(x)\ dx, \text{ où } g(x) = \int_c^d \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\ dy$$

**2)** [1 pt] Montrer qu'il existe un réel $M$ tel que

$$\forall (x,y) \in [-1,1]^2, \quad |f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)| \leq M\ \ |xy|$$

**Exercice B** (♣)

On considère $\forall x \in ]1,+\infty[$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble dénombrable des nombres premiers.

**1)** Montrer que $f$ est bien définie et de classe $C^1$ sur $]1,+\infty[$.

**2)** On munit $\mathbb{N}^*$ de la loi $Q$ définie par $Q(\{n\}) = \dfrac{1}{n^x\ \zeta(x)}$, qu'on note $q_n$.

Justifier qu'on définit bien une loi $Q$ sur $\mathbb{N}^*$.

**3)** Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire telle que $P(X = n) = q_n$.

a) On note $A_d$ l'événement : $d$ divise $X$. Calculer $P(A_d)$.

b) Montrer que la famille infinie $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une famille d'événements mutuellement indépendantes.

c) On pose $\mathcal{P} = \{p_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ $=\{p_1, p_2, ...\}$.

En considérant $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$, montrer que $\zeta(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left( \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{p_n^x}} \right)$.

**4)** Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire indépendante de $X$ et de même loi.

Montrer que $P(\text{pgcd}(X,Y) = 1) = \dfrac{1}{\zeta(2x)}$.

*Remarque* : On a ainsi $\lim_{x \to 1, x > 1} = \dfrac{1}{\zeta(2)} = \dfrac{6}{\pi^2}$.

**Exercice C**

Soit un nombre complexe $z$ tel que $\rho = |z| < 1$. *Les deux questions sont indépendantes.*

**1)** Montrer que $\text{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) > 0$.

**2)** Calculer $A(z) = \int_0^{2\pi} \dfrac{1}{1 - ze^{i\theta}}\ d\theta$, $B(z) = \int_0^{2\pi} \dfrac{1}{z - e^{i\theta}}\ d\theta$ ( et $C(z) = \int_0^{2\pi} \dfrac{1 - \rho\cos\theta}{1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2}\ d\theta$ ).

**Exercice C. DSE de l'exponentielle d'une fonction DSE**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Pour $|x| < R$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$.

**1)** Montrer qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \mu^{n+1}$.

**2)** On définit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}$.

Montrer que le rayon de convergence $R'$ de $\sum b_n x^n$ vérifie $R' \geq \dfrac{1}{\mu}$.

**3)** Montrer que $\forall x \in \left]-\dfrac{1}{\mu}, \dfrac{1}{\mu}\right[$, $\exp(F(x)) = g(x)$, où $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$.

**4)** Montrer que si $f$ est DSE au voisinage de 0, il en est de même de $\exp(f)$.

**5)** *Un exemple.* En utilisant les familles sommables, montrer que $g(x) = \exp(e^x)$ est DSE sur $\mathbb{R}$, et exprimer les coefficients $b_n$ du DSE par des séries.

**Exercice E.**

**1)** Soit un réel $r \in ]1, +\infty[$ et $Y$ une variable aléatoire réelle à valeurs positives telle que $E(Y^r) < +\infty$.

a) Montrer que pour tout $s \in [1, r]$, on a $E(Y^s) < +\infty$.

b) Soit $s \in [1, r]$. Montrer que $Y^s - E(Y)^s \geq sE(Y)^{s-1}(Y - E(Y))$.

c) Comparer $E(Y^s)$ et $E(Y)^s$.

**2)** Soit un réel $r \in ]1, +\infty[$ et une variable aléatoire réelle $X$ à valeurs positives telle que $E(X^r) < +\infty$.

On définit $\varphi$ par $\forall t \in [1, r]$, $\varphi(t) = E(X^t)^{1/t}$. Montrer que $\varphi$ est croissante sur $[1, r]$.

**Exercice F. Une caractérisation des polynômes réels scindés**

**1)** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme réel de degré $n$ et unitaire ( = de coefficient dominant 1).

Montrer que $P$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ ssi $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}\, z|^n$ .

**2)** a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $E_n$ l'ensemble des polynômes réels scindés sur $\mathbb{R}[X]$, de degré $n$ et unitaires.

Montrer que $E_n$ est une partie fermée dans $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Qu'en déduire quant à l'adhérence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ?