Interrogation n°24 bis. Corrigé

1) a) J est symétrique, donc J est orthodiagonalisable.

On a $\operatorname{rg} J = 1$, donc $\dim \operatorname{Ker} J = n-1$. La dernière valeur propre est $\operatorname{tr} J = n$.

Donc J est orthosemblable à $\operatorname{Diag}(0,0,...,0,n)$.

b) On a $M = \alpha(J-I)$, donc M est orthosemblable à $D = \operatorname{Diag}(-\alpha,-\alpha,...,-\alpha,1)$.

Donc M admet le polynôme annulateur scindé à racines simples $(X+\alpha)(X-1)$.

c) Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M^n = UD^nU^T$, où $D = \operatorname{Diag}(-\alpha,-\alpha,...,-\alpha,1)$.

On a $D^n = \operatorname{Diag}((-\alpha)^n, (-\alpha)^n, ..., (-\alpha)^n, 1) = (-\alpha)^n \sum_{i=1}^{N-1} E_{j,j} + E_{N,N}$.

Donc $M^n = M_0 + (-\alpha)^n M_1$, avec $M_0 = UE_{N,N}U^T$ et $M_1 = U(\sum_{i=1}^{N-1} E_{j,j})U^T$.

d) On a $\left\{\begin{array}{l} M_0 + M_1 = I_N \\ M_0 - \alpha M_1 = M \end{array}\right.$, donc $M_0 = \dfrac{\alpha I_N + M}{1+\alpha} = \dfrac{1}{N}\ J$ et $M_1 = I_N - \dfrac{1}{N}\ J$.

Donc $M^n - \dfrac{1}{N}J = (-\alpha)^n \left(I_N - \dfrac{1}{N}\ J\right)$, donc $\left|(M^n)_{i,j} - \dfrac{1}{N}\right| \leq |\alpha|^n = \left(\dfrac{1}{N-1}\right)^n$.

e) Comme J et I_N commutent, on a par le binôme : $M^n = \alpha^n \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} J^k + (-\alpha)^n I_N$.

On a $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{N-k}\binom{n}{k} J^k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\binom{n}{k} N^k J = (1-N)^n J - (-1)^n J$.

Donc $M^n = \alpha^n (1-N)^n J - (-\alpha)^n J + (-\alpha)^n I_N = J + (-\alpha)^n (I_N - J)$, d'où on retrouve d).

2) a) On applique le th spectral à la matrice symétrique réelle A, et on classe les valeurs propres par ordre décroissant.

b) Si $X = \sum_{k=1}^{N} \langle X, V_k\rangle V_k$, on a $A^n X = \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k)^n \langle X, V_k\rangle V_k$.

On a $(A^n)_{i,j} = (A^n E_j)_i = \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k)^n \langle E_j, V_k\rangle (V_k)_i = \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k)^n (V_k)_j (V_k)_i$.

c) Soit X un vecteur propre de A de valeur propre λ. Il existe i tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$ et on a $|x_i| > 0$.

On a $\sum_{i=1}^{N} A_{ij} x_j = \lambda x_i$. Donc $\lambda = \sum_{i=1}^{N} A_{ij} \dfrac{x_j}{x_i}$. D'où $|\lambda| \leq \sum_{i=1}^{N} A_{ij} \left|\dfrac{x_j}{x_i}\right| \leq \sum_{i=1}^{N} A_{ij} = 1$.

On a égalité $|\lambda| = 1$ ssi $\forall j \in [\![1,N]\!]$, $\dfrac{x_j}{x_i}$ égaux et de même signe, donc ssi $X \in \mathbb{R}Z$.

Or, $AZ = Z$. Donc -1 n'est pas valeur propre, et le sev propre de valeur propre 1 est la droite $\mathbb{R}Z$.

d) Comme $\forall j \in [\![2,N]\!]$, $\lambda_j \in [\lambda_N, \lambda_2]$, on a $\rho = \max_{2\leq k\leq N} |\lambda_j| < 1$.

On a $V_1 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{N}} Z$, donc $(V_1)_j (V_1)_i = \dfrac{1}{N}$.

Par b), on a $(A^n)_{i,j} = \dfrac{1}{N} + \sum_{k=2}^{N} (\lambda_k)^n (V_k)_j (V_k)_i$. D'où $\left|(A^n)_{i,j} - \dfrac{1}{N}\right| \leq \rho^n \sum_{k=2}^{N} |(V_k)_j (V_k)_i|$.

Par Cauchy-Schwarz, $\sum_{k=2}^{N} |(V_k)_j (V_k)_i| \leq \left(\sum_{k=2}^{N} (V_k)_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=2}^{N} (V_k)_i^2\right)^{1/2}$.

La matrice $(V_1, ..., V_N)$ est orthogonales, donc sa transposée aussi.

On en déduit que $\sum_{k=2}^{N}(V_k)_j^2 = \sum_{k=2}^{N}(V_k)_i^2 = 1$. D'où $\left|(A^n)_{i,j} - \frac{1}{N}\right| \leq \rho^n$.

3) a) En développant selon la première colonne, on a : $\det(xI_N - M) = x^N - (-1)^{N-1}(-1)^{N-1} = x^N - 1$.

Donc le spectre de M est U_N (et M est ainsi diagonalisable sur $\mathbb{C}$, car χ_M est scindé à racines simples).

On a $MX = \omega^k X$ ssi $\forall j \in [\![1, N]\!]$, $x_{j+1} = \omega^k x_j$ (la dernière équation est redondante).

Donc $\mathrm{Ker}(M - \omega^k I_N) = \mathbb{C}(\omega^{ki})_{0 \leq i < N}$.

b) $ME_j = E_{j-1 \bmod N}$, donc $M^{-1}E_j = E_{j+1 \bmod N}$, donc $M^{-1} = (\delta_{i=j+1 \mod N})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$.

Donc $A_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ii} + \frac{1}{4}(\delta_{i=j-1 \mod N} + \delta_{i=j+1 \mod N})$.

c) A est diagonalisable car symétrique réelle.

Par a), ses valeurs propres (sur $\mathbb{C}$) sont les $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\omega^k + \omega^{-k}) = \left(\frac{1 + \cos(2\pi k/N)}{2}\right)$, où $0 \leq k < N$.

d) Les autres valeurs propres sont les $\lambda_k = \frac{1 + \cos(2\pi k/N)}{2} = \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)^2$, où $0 \leq k < N$.

$\lambda_0 = 1$ est valeur propre simple de A, qui est diagonalisable dans une BON $(V_0, ..., V_{N-1})$.

Par 2) d), on a $\left|(A^n)_{i,j} - \frac{1}{N}\right| \leq \rho^n$, où $\rho = \max_{1 \leq k < N} |\lambda_k| = \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^2$.

4) a) On pose $\theta = \frac{2k\pi}{N}$. Les racines de l'équation caractéristique sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, avec $\theta = \frac{k\pi}{N}$.

- Supposons $\theta \neq 0$. Alors $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont distinctes, donc $u_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}$.

Or, on a $e^{iN\theta} = e^{-iN\theta}$, donc $u_0 = u_1$ implique $u_N = u_{N+1} = \pm 1$.

- Supposons $\theta = 0$. Alors 1 est racine d'ordre 2 de l'équation caractéristique, donc $u_k = \alpha + \beta k$.

Comme $u_0 = u_1 = 1$, alors $u_k = 1$, donc a fortiori $u_N = u_{N+1} = 1$.

b) On vérifie aisément qu'avec les hypothèses de a), le vecteur non nul $(u_1, ..., u_N)$ vérifie $MZ = \lambda Z$.

Comme les λ_k sont distincts, on obtient N valeurs propres distinctes, d'où $\mathrm{Sp}(M) = \{\lambda_k,\ k \in [\![0, N-1]\!]\}$.

c) Le calcul fait au 2) s'applique (même si les A_{ii} ne sont pas ici strictement positives).

On a $\rho = \max_{1 \leq k \leq N-1} \left|\cos\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right| = \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2$, $\left|(A^n)_{ij} - \frac{1}{N}\right| \leq \cos\left(\frac{\pi}{N}\right)^n$.