Interrogation n°24 bis

Soit un entier $N \geq 2$. Pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $(i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, on note $(A^n)_{ij}$ les coefficients de A^n.

On note Z le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont les coefficients sont égaux à 1.

1) *Un premier exemple.* On considère $M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha & \dots & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & \alpha & \vdots \\ \alpha & \alpha & 0 & \ddots & \alpha \\ \vdots & \alpha & \ddots & \ddots & \alpha \\ \alpha & \dots & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}$, où $\alpha = \dfrac{1}{N-1}$.

On note $J \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1.

a) Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b) Montrer que M admet un polynôme annulateur de degré 2 qu'on précisera.

c) Montrer qu'il existe deux matrices M_0 et M_1 indépendantes de N telles que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = M_0 + (-\alpha)^n M_1$$

d) Montrer que $M_0 = \dfrac{1}{N}J$ et $M_1 = I_N - \dfrac{1}{N}J$, et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2,\ \left|(M^n)_{i,j} - \frac{1}{N}\right| \leq \left(\frac{1}{N-1}\right)^n$$

e) On propose une autre preuve de c). On a $J^2 = NJ$ et $M = \alpha(J - I_N)$.

Exprimer simplement M^n comme combinaison de J et de I_N. Retrouver c).

2) *Cas général*

Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ une matrice symétrique vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2,\ A_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,N]\!],\ \sum_{j=1}^{N} A_{ij} = 1$$

a) Justifier qu'il existe une base orthonormée $V_1, ..., V_n$ de $\mathbb{R}^N$ et des réels $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_N$ tels que

$$\forall k \in [\![1,N]\!],\ \ AV_k = \lambda_k V_k$$

On note $(V_k)_i$ les coefficients de V_k.

b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2,\ (A^n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} (\lambda_k)^n (V_k)_i (V_k)_j$$

c) Dans cette question, on suppose $\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, $\boxed{A_{ij} > 0}$.

Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset]-1,1]$ et que $\mathrm{Ker}(A - I_n) = \mathbb{R}Z$.

Indication : Pour X vecteur propre de A, considérer i tel que $|x_i| = \|X\|_\infty$, où $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |x_j|$.

d) Dans cette question, on suppose que $\lambda_1 = 1$ et que $\forall j \in [\![2, N]\!]$, $\lambda_j \in]-1, 1[$.

On pose $\rho = \max(|\lambda_2|, |\lambda_N|) < 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|(A^n)_{i,j} - \dfrac{1}{N}\right| \leq \rho^n$.

e) *Question supplémentaire hors-interro.* On remplace l'hypothèse $A_{ij} = A_{ji} > 0$ par $A_{ij} = A_{ji} \geq 0$.

Montrer que -1 est valeur propre de A ssi il existe une partition $[\![1, N]\!] = J_0 \sqcup J_1$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2, \;\; a_{ij} > 0 \Rightarrow (i,j) \in (J_0 \times J_1) \sqcup (J_1 \times J_0)$$

3) *Un deuxième exemple*

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix} = (\delta_{i=j-1 \bmod N})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

a) Montrer que le spectre de M sur $\mathbb{C}$ est $U_N = \{\omega^k, \, 0 \leq k < N\}$, où $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{N}\right)$.

b) Expliciter la matrice $A = \dfrac{1}{2} I_n + \dfrac{1}{4}\left(M + M^{-1}\right)$ en justifiant la valeur de M^{-1}.

c) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et expliciter ses valeurs propres.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2$, $\left|(A^n)_{ij} - \dfrac{1}{N}\right| \leq \cos\left(\dfrac{\pi}{N}\right)^{2n}$.

4) *Un troisième exemple*

On pose $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ & 1/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & 1/2 \\ & & & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

a) Soit $k \in \{0, 1, ..., N-1\}$. On considère $\lambda_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{N}\right)$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $u_{n-1} - 2\lambda u_n + u_{n+1} = 0$.

Montrer que $u_N = u_{N+1}$.

b) Déterminer $\mathrm{Sp}(M)$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i,j) \in [\![1, N]\!]^2$, $\left|(A^n)_{ij} - \dfrac{1}{N}\right| \leq \cos\left(\dfrac{\pi}{N}\right)^{n}$.