Interrogation n°24. Corrigé

Exercice A

1) Par Leibniz, $F_p^{(n)} \in \text{Vect}(t^k\ f^{(n-k)})_{0\leq k\leq n}$, donc la fonction $t^q\ F_p^{(n)} \in \text{Vect}(t^{k+q}\ f^{(n-k)})_{0\leq k\leq n}$.

D'où $t^q\ F_p^{(n)}(t) = O_{\pm\infty}(1)$ car une combinaison linéaire de fonctions bornées est bornée.

2) Par récurrence, on montre que $g^{(n)}(t) = P_n(t)\exp(-t^2)$, où P_n polynôme.

On a en effet $P_0(t) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(t) = P_n'(t) - 2tP_n(t)$. Donc $t^p\ g^{(n)}(t) = \mathfrak{o}_{\pm\infty}(1)$.

3) a) Posons $g(t,\lambda) = f(t)\ \exp(i\lambda t)$. On a :

- pour tout t, $\lambda \longmapsto g(t,\lambda)$ est de classe C^∞, et $\dfrac{\partial^n g}{\partial\lambda^n}(t,\lambda) = (it)^n f(t)\exp(i\lambda t)$

- pour tout λ, $t \longmapsto \dfrac{\partial^n g}{\partial\lambda^n}(t,\lambda)$ est continue (par morceaux)

- on a $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{\partial^n g}{\partial\lambda^n}(t,\lambda)\right| = t^n\,|f(t)| = \varphi(t) = O_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ car $f \in E$, donc φ intégrable.

Donc $\widehat{f}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on a $\widehat{f}^{(n)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}}(it)^n f(t)\exp(i\lambda t)\ dt = i^n\ \widehat{F_n}(\lambda)$.

b) On a $\widehat{(f')}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)\exp(i\lambda t)\ dt$, et par IPP, $\widehat{(f')}(\lambda) = -i\lambda\ \int_{\mathbb{R}} f(t)\exp(i\lambda t)\ dt$.

En effet, $f(t)\exp(i\lambda t)$ converge vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$. On a donc bien $\lambda\ \widehat{f}(\lambda) = i\ \widehat{(f')}(\lambda)$.

c) Si $f \in E$, $\left|\widehat{f}(\lambda)\right| \leq \int_{\mathbb{R}}|f(t)| < +\infty$, car $f(t) = O_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc $\widehat{f}(\lambda) = O_{\pm\infty}(1)$.

d) Par a), on a $\widehat{f}^{(n)}(\lambda) = i^n\ \widehat{F_n}(\lambda)$, où $F_n(t) = t^n\ f(t) \in E$.

Par b) appliqué p fois, on a $\lambda^p\ \widehat{f}^{(n)}(\lambda) = i^{p+n}\ \widehat{F_n^{(q)}}(\lambda)$.

Or, $F_n^{(q)} \in E$ car $F_n \in E$ (les dérivées de $F_n^{(q)}$ sont des dérivées de F_n).

Donc par c), $\widehat{F_n^{(q)}}(\lambda) = O_{\pm\infty}(1)$ car $F_n^{(q)} \in E$. Donc on a bien $\lambda^p\ \widehat{f}^{(n)}(\lambda) = O_{\pm\infty}(1)$.

Exercice B

1) a) Soit $\alpha > \mu$. Par définition de la borne inf, il existe β tel que $\mu < \beta \leq \alpha$ et $\left(\dfrac{a_n}{n^\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Or, $\left|\dfrac{a_n}{n^\alpha}\right| \leq \left|\dfrac{a_n}{n^\beta}\right|$. Donc a fortiori, la suite $\left(\dfrac{a_n}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

b) Soit $\alpha > \mu+1$. On a donc $\alpha = \mu+1+2\varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$.

On a $\dfrac{a_n}{n^\alpha} = \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\dfrac{a_n}{n^{\mu+\varepsilon}} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, car la suite $\left(\dfrac{a_n}{n^{\mu+\varepsilon}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par a).

Donc $\sum \dfrac{a_n}{n^\alpha}$ converge absolument.

2) On pose $f_n(x) = a_n\exp(-(\ln n)x) = \dfrac{a_n}{n^x}$. On a $f_n'(x) = -\dfrac{(\ln n)\ a_n}{n^x}$.

- Par 1) a), $\sum f_n$ converge simplement sur $]\mu,+\infty[$, et donc a fortiori sur $]\mu+1,+\infty[$.

- Soit $\alpha > \mu+1$. On a $\sup_{x\geq\alpha}|f_n'(x)| = \dfrac{(\ln n)\ |a_n|}{n^\alpha} = O\left(\dfrac{|a_n|}{n^{\alpha-\varepsilon}}\right)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

On choisit ε de sorte que $\alpha - \varepsilon > \mu + 1$. Par 1) b), $\sum \dfrac{|a_n|}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ converge.

Donc $\sum f_n'$ converge normalement sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha > \mu + 1$.

Donc g est bien de classe C^1 sur $]\mu + 1, +\infty[$.

3) Pour $z \in \Delta$, on a $\left|\dfrac{a_n}{n^z}\right| = |a_n|\, e^{-\operatorname{Re}(z \ln n)} = \dfrac{|a_n|}{n^{\operatorname{Re} z}}$ et $\sum \dfrac{|a_n|}{n^{\operatorname{Re} z}}$ converge par 1) b).

Soit $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexes de Δ convergeant vers $z \in \Delta$.

Pour $k \geq p$ assez grand, on a $\operatorname{Re} z_k \geq \alpha > \mu$. Donc $\sup_{k\geq p} \left|\dfrac{a_n}{n^z}\right| \leq \dfrac{|a_n|}{n^\alpha}$.

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{a_n}{n^{z_k}} = \dfrac{a_n}{n^z}$ et d'autre part $\sup_{k\geq p} \left|\dfrac{a_n}{n^z}\right| \leq \dfrac{|a_n|}{n^\alpha}$, où $\sum \dfrac{|a_n|}{n^\alpha}$ converge.

Par le théorème de la double limite, on a donc $\lim_{k\to+\infty} f(z_k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n^z} = f(z)$.

Exercice C

1) a) On remarque tout d'abord que $|1+z| \leq 1 + |z| \leq \exp(|z|)$, car exp est convexe.

On a $P_{n+1} - P_n = z_{n+1} P_n$.

On a $|P_n| \leq \prod_{k=0}^n |1 + z_k| \leq \exp(\sum_{k=0}^n |z_k|) \leq e^L$. Donc $|P_{n+1} - P_n| \leq |z_{n+1}|\, e^L$.

b) La série $\sum (P_{n+1} - P_n)$ converge absolument, donc converge, et ainsi $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Posons $L = \sum_{n=0}^{+\infty} \|\omega_n\|_\infty$, où $\|\omega_n\|_\infty = \sup_{x\in J} |\omega_n(x|)$.

Par 1) b), on a $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq \omega_{n+1}(x)\ e^L$, donc $\|P_{n+1} - P_n\|_\infty \leq \|\omega_{n+1}\|_\infty\ e^L$.

Donc la série $\sum (P_{n+1} - P_n)$ converge normalement, donc uniformément sur J.

Ainsi, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I, et sa limite P est continue car les P_n sont continues.

3) a) On a $|1_{Y\in A} - 1_{Z\in A}| = \begin{cases} 1 \text{ si } (Y \in A \text{ et } Z \notin A) \text{ ou } (Y \notin A \text{ et } Z \in A) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On a $(Y \in A \text{ et } Z \notin A) \cup (Y \notin A \text{ et } Z \in A) \subset (Y \neq Z)$.

Donc $|P(Y \in A) - P(Z \in A)| = |E(1_{Y\in A} - 1_{Z\in A})| \leq E(|1_{Y\in A} - 1_{Z\in A}|) \leq E(1_{Y\neq Z}) = P(Y \neq Z)$.

b) On note $B = \mathbb{N} \setminus A$ le compélmentaire de A dans $\mathbb{N}$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} |P(Y = n) - P(Z = n)| = \sum_{n\in A}(P(Y = n) - P(Z = n)) + \sum_{n\in B}(P(Z = n) - P(Y = n))$.

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} |P(Y = n) - P(Z = n)| = (P(Y \in A) - P(Z \in A)) + (P(Z \in B) - P(Z \in B)) \leq 2\ P(Y \neq Z)$.

c) $|G_Y(z) - G_Z(z)| = \sum_{n=0}^{+\infty} |(P(Y = n) - P(Z = n))z^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |P(Y = n) - P(Z = n)|$.

4) a) Par indépendance des X_k, $G_{S_n}(z) = \prod_{k=1}^n G_{X_k}(z) = \prod_{k=1}^n (1 + p_n(z - 1))$.

Posons $\omega_n(z) = p_n(z - 1)$.

$\sum \omega_n(z)$ converge normalement sur D car $\sup_{\hat{}\,z\in D} |\omega_n(z)| \leq 2p_n$ et que $\sum p_n$ converge.

Par 2), $(G_{S_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge normalement sur D.

b) $P(S_n \neq S) = P(\exists\, k > n,\ X_k = 1) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X_k = 1) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p_n$, donc $\lim_{n\to+\infty} P(S_n \neq S) = 0$.

Par continuité croissante, il existe presque sûrement $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_n = S$. Donc $P(S < +\infty) = 1$.

On a $(S = k) = (\exists\, n \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k,\ S_n = k) = \cup_{n\in\mathbb{N}} \cap_{k\geq n} (S_n = k)$ est donc un événement.

Donc S est bien une variable aléatoire.

c) $\forall z \in D$, $|G_S(z) - G_{S_n}(z)| \leq P(S_n \neq S) \to 0$ par a), donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in D} |G_S(z) - G_{S_n}(z)| = 0$.

Remarque culturelle :

On peut améliorer le résultat du 1). On suppose que $\sum z_n$ et $\sum |z_n|^2$ convergent.

En effet, on vérifie que $(1+z_n)\exp(-z_n) = 1 + O(|z_n|^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On en déduit par 1) que $\prod (1+z_n)\exp(-z_n)$ converge.

Comme $\prod \exp(z_n)$ converge (par continuité de exp), alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice D

1) a) Les sev propres de u sont orthogonaux et leur somme directe vaut E.

Donc tout $x \in E$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{k=1}^{d} x_k$, avec $v_k \in E_{\lambda_k}$.

Comme $x \in \Sigma$, alors $\sum_{k=1}^{d} \|x_k\|^2 = 1$ par Pythagore.

b) En considérant $e_k \in E_{\lambda_k}$ vecteur propre unitaire, on a $\lambda_k = \langle e_k, u(e_k)\rangle$, donc $|\lambda_k| \leq \varepsilon$.

Avec les notation de a), $u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Donc $\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \|x_k\|^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \varepsilon^2$.

Donc $\|u(x)\| \leq \varepsilon$. Par Cauchy-Schwarz, on a donc $|\langle x, u(y)\rangle| \leq \|x\|\,\|u(y)\| \leq 1 \times \varepsilon = \varepsilon$.

2) a) Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k \in \Sigma$. On a $P(u)(x) = \sum_{k=1}^{n} P(\lambda_k) x_k$.

Donc $\langle x, P(u)(x)\rangle = \sum_{k=1}^{n} P(\lambda_k) \|x_k\|^2$ .Par hypothèse $P(\lambda_k) \in [a, b]$.

Donc $\langle x, P(u)(x)\rangle \in [a, b]$ comme valeur moyenne de réels de $[a, b]$, car $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 = 1$.

b) Pour $x \in E_{\lambda_j}$, on a $L_k(u)(x) = L_k(\lambda_j)x$, donc vaut x si $j = k$ et $\overrightarrow{0}$ sinon.

Ainsi, $L_k(u)$ est la projection orthogonale sur E_{λ_k} (appelé projecteur spectral)

Avec les notations de 1), on a $L_k(u)(x) = x_k$, donc $\langle x, L_k(u)(x)\rangle = \|x_k\|^2 \in [0, 1]$.

3) a) On considère $x = e_1 + ... + e_d$ somme de d vecteurs propres non nuls, avec $e_k \in E_{\lambda_k}$.

La famille $(e_1, ..., e_d)$ est libre et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x, u(x), ..., u^{d-1}(x))$ est une matrice de Van der Monde inversible.

Donc $(x, u(x), ..., u^{d-1}(x))$ est libre.

b) Pour $k \leq d$, $(x, u(x), ..., u^{k-1}(x))$ est libre, donc a fortiori $(\mathrm{Id}, u, ..., u^{k-1})$ est libre.

Donc $\forall k \leq d$, $\dim H_k = k$.

Soit $k > d$. On sait que $\pi(X) = \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)$ annule u.

En considérant la division euclidienne de P par π, on a $P(u) = R(u)$ où R reste de P par π.

Comme $\deg R < d$, alors $\mathrm{Vect}(u^k(x))_{k\in\mathbb{N}} = H_d$ et a fortiori, $\forall k \geq d$, $H_k = H_d$.

c) *Première méthode* :

Par interpolation de Lagrange, il existe $P \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $P(\lambda_k) = \dfrac{1}{\lambda_k}$

Donc $u^{-1} = P(u) \in H_d$.

Seconde méthode : On a $\pi(u) = u$, et $\pi(0) \neq 0$, car les λ_k sont non nuls.

Donc $\pi(X)$ est de la forme $\alpha - XP(X)$, avec $\alpha \neq 0$ et $\deg P < \deg \pi = d$.

Donc $uP(u) = \alpha\,\mathrm{Id}$ et $u^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}P(u) \in H_d$.

4) Par 2), on a $\forall x \in \Sigma$, $|\langle x, Q_k(u)(x)\rangle| \leq 2\alpha^k$, donc par 1) b), $\|Q_k(u)\|_{op} \leq 2\alpha^k$.

Or, $Q_k(X)$ est de la forme $1 - XP(X)$, où $\deg P < k$. Donc $v = P(u)$ convient.

5) a) On montre d'abord que $T_k(-X) = (-1)^k T_k(X)$.

On a $T_k(-\cos\theta)) = T_k(\cos(\theta+\pi)) = \cos(n(\theta+\pi)) = (-1)^n\cos(n\theta)$.

Donc $T_k(-X)$ et $(-1)^k T_k(X)$ coïncident sur $[-1,1]$ infini, donc sont égaux.

b) $Q_k(0) = \omega_k T_k\left(\dfrac{-(\lambda+\mu)}{\lambda-\mu}\right) = 0$. Lorsque t décrit $[\mu,\lambda]$, $\dfrac{2t-(\lambda+\mu)}{\lambda-\mu}$ décrit $[-1,1]$.

Or, $\sup_{[-1,1]}|T_k| = 1$, car $T_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$, et en particulier $T_k(1) = 1$.

Donc $\sup_{t\in[\lambda,\mu]}|Q_k(t)| = |\omega_k|\sup_{[-1,1]}|T_k| = \sup_{[-1,1]}|T_k| = |\omega_k|$.

c) On a $\operatorname{ch}\theta = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}$, donc $|T_k(-\operatorname{ch}\theta)| = \operatorname{ch}(n\theta) \geq \dfrac{e^{n\theta}}{2}$, donc $|\omega_k| \leq 2e^{-n\theta}$.

d) $e^\theta + e^{-\theta} = 2\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}$, donc e^θ est racine de $X^2 - 2\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}X + 1$. L'autre racine est $e^{-\theta} < 1$.

Or, $\dfrac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1} + \dfrac{\sqrt{\tau}+1}{\sqrt{\tau}-1} = \dfrac{\tau-1}{\tau+1} = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}$ et $\dfrac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1}\,\dfrac{\sqrt{\tau}+1}{\sqrt{\tau}-1} = 1$.

Donc $\dfrac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1}$ et $\dfrac{\sqrt{\tau}+1}{\sqrt{\tau}-1}$ sont les racines de ce même polynôme. Comme $e^{-\theta} < 1$, on a $e^{-\theta} = \dfrac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1}$.

6) et Exercice Z

On a $(\cos\theta)^n = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\exp(i(n-2k)\theta)$.

En passant aux parties réelles, on obtient :

$(\cos\theta)^n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos(n-2k)\theta) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos(|n-2k|)\theta) = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}T_{|n-2k|}(\cos\theta)$.

Deux polynômes qui coïncident sur $[-1,1]$ infini sont égaux, donc $X^n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\,T_{|n-2k|}(X)$.