Interrogation n°23 bis. *Barème sur 23 pts*

Problème. Convolution (*inspiré Mines PC 2010*)

1) On considère $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\ dx = 1$.

a) [1.5 pt] Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)\ dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G(x)\ dx$.

b) [1 pt] Pour $\lambda > 0$, on pose $G_\lambda(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\lambda}\right)$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} xG_\lambda(x)\ dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 G_\lambda(x)\ dx$.

Pour la suite de l'exercice, on utilise les notations suivantes :

- On note L l'ensemble des fonctions continues positives $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)\ dt = 1$.

- On note E l'ensemble des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On sait que toute fonction $f \in E$ est bornée, et on munit E de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup_{\mathbb{R}} |f|$.

On admet que toute fonction $f \in E$ vérifie la propriété d'uniforme continuité :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

2) Pour $f \in E$ et $p \in L$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{(f * p)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)p(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)p(x-t)\ dt}$.

a) [2 pts] Justifier l'existence de $(f * p)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et la continuité de $(f * p)$ sur $\mathbb{R}$.

b) [1 pt] Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty}(f * p)(x) = .0$.

Remarque : On montre de même (*admis ici*) que $\lim_{x\to-\infty}(f * p)(x) = .0$.

3) Pour $p \in L$, on considère l'endomorphisme $T_p : E \to E\ \ f \longmapsto f * p$.

On admet que $T_p \circ T_q = T_q \circ T_p$ pour toutes fonctions p et $q \in L$.

On note T_p^n l'endomorphisme obtenu en composant n fois l'endomorphisme T_p.

a) [0.5 pt] Montrer que $\forall f \in E$, $\|T_p(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

b) [2 pts] Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in E$, $\left\|T_p^n(f) - T_q^n(f)\right\|_\infty \leq n\,\|T_p(f) - T_q(f)\|_\infty$.

4) On considère $f \in E$ et $p \in L$. On pose $\forall a > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_a(t) = a\ p\,(at)$.

a) [1 pt] Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lim_{a\to+\infty}(f * p_a)(x) = f(x)$.

b) [0.5 pt] Soit $r > 0$. Montrer que $\int_{|t|\geq r} p_a(t)\ dt$ converge vers 0 lorsque a tend vers $+\infty$.

c) [1.5 pt] ($\bigstar$) Montrer que $(f * p_a)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

$\boxed{\textbf{Exercice A. Loi faible et loi forte des grands nombres}}$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables réelles indépendantes $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, et de même loi que X.

On pose $\boxed{Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n}$.

On suppose $E(X) = 0$ et $E(X^4) < +\infty$, c'est-à-dire X d'espérance nulle et de moment d'ordre 4 fini.

1) [0.5 pt] Montrer que X est de variance finie. On pose $K = E(X^2)$ et $L = E(X^4)$.

2) [1 pt] *Loi faible des grands nombres*

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| \geq \varepsilon) = 0$.

3) *Loi forte des grands nombres*

a) [1.5 pt] Déterminer le nombre N de quadruplets $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$ composés de deux paires distinctes de termes égaux (comme par exemple $(3, 3, 1, 1)$ ou $(1, 3, 3, 1)$ ou encore $(2, 5, 2, 5)$).

b) [1.5 pt] Exprimer $E(Y_n^4)$ à l'aide de K, L et n. On en déduit $E(Y_n^4) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

c) [1 pt] Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $P(|Y_n| \geq \varepsilon) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

d) [1.5 pt] Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que presque sûrement, $|Y_n(\omega)| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang.

e) *Question supplémentaire*. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = 0$ presque sûrement.

$\boxed{\textbf{Exercice B. Preuve de la propriété d'uniforme continuité}}$

1) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $K = \{(x, y) \in [a, b]^2 \mid |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}$..

a) [1 pt] Montrer que K est une partie compacte (= fermée et bornée) de $\mathbb{R}^2$..

b) [1.5 pt] On considère l'application $\Psi : [a, b]^2 \to \mathbb{R} \;\; (x, y) \longmapsto |x - y|$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |x - y| < \alpha \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

c) [1 pt] Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier φ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

a) [0.5 pt] Montrer qu'il existe b tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x \geq b \text{ et } y \geq b) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$..