Interrogation n°23. Corrigé

Exercice A

1) On a $f(t) = O_{+\infty}(|tf(t)|)$, donc par comparaison, f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2) L'application F est strictement croissante et induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, M[$ de classe C^1.

Donc F^{-1} est une bijection de $[0, M[$ sur $[0, +\infty[$ strictement croissante et de classe C^1.

$x_{k,n}$ est l'unique réel vérifiant $F(x_{k,n}) = \dfrac{k}{n}M$, c'est-à-dire $x_{k,n} = F^{-1}\left(\dfrac{k}{n}M\right)$.

3) On a $\forall\theta \in [0, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(\theta) = g(\theta M)$ car $\lim_{n\to+\infty} \left\lfloor \dfrac{\theta n}{n} \right\rfloor = \theta$ et g continue.

On a φ_n continue par morceaux et $0 \leq \varphi_n(\theta) \leq g(\theta M)$ car $\left\lfloor \dfrac{\theta n}{n} \right\rfloor \leq \theta$ et g est croissante.

Donc par convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(\theta)\ d\theta = \int_0^1 g(\theta M)\ d\theta$..

4) $\int_0^1 \varphi_n(\theta)\ d\theta = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\dfrac{k}{n}M\right)$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} g\left(\dfrac{k}{n}M\right) = \int_0^1 g(\theta M)\ d\theta = \dfrac{1}{M}\int_0^1 g(t)\ dt$.

5) On a $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} x_{k,n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} F^{-1}\left(\dfrac{k}{n}M\right)$. Or, F^{-1} est intégrable sur $[0, M[$.

En effet, par le changement de variable bijectif $x = F(t)$ de classe C^1, on a $dx = f(t)\ dt$ et

$$\int_0^M F^{-1}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} F^{-1}(F(t))\ f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t\ f(t)\ dt$$

Par 3), appliqué à $g = F^{-1}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} x_{k,n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} F^{-1}\left(\frac{k}{n}M\right) = \frac{1}{M}\int_0^{+\infty} t\ f(t)\ dt = \frac{\int_0^{+\infty} t\ f(t)\ dt}{\int_0^{+\infty} f(t)\ dt}$$

Exercice B

1) Pour construire (k, l), on choisit k, et à k fixé, il y a $(n - k + 1)$ choix pour l.

Donc $\operatorname{card}\Delta_n = \sum_{k=0}^{n}(n - k + 1) = \sum_{j=0}^{n}(j + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$.

Remarque : On peut aussi associer à chaque couple (k, l) la partie $\{k + 1, k + l + 2\}$ de $[\![1, n + 2]\!]$.

On obtient une bijection avec l'ensemble des parties de card 2 de $[\![1, n + 2]\!]$, donc $\operatorname{card}\Delta_n = \binom{n+2}{2}$.

2) a) On choisit un point arbitraire $(x_0, y_0) \in \Omega$. Comme Ω est ouvert pour toute norme, donc pour la norme $\|\ \|_\infty$, donc il existe une boule $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ incluse dans Ω.

A fortiori, $I \times J =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\times]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ convient.

b) $P(x, y) = \sum_{k=0}^{n} A_k(y)x^k$, où $A_k(y) = \sum_{l=0}^{n-k} a_{k,l}y^l$ polynôme en y de degré $\leq n - k$.

Soit $y_0 \in J$. On a $\forall x \in I$, $P(x, y_0) = 0$, et comme I est infini, alors $A_k(y_0) = 0$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

On fait varier y_0 dans J infini, donc tous les coefficients de A_k sont nuls. Donc les $a_{k,l}$ sont nuls.

c) On considère $u : \mathbb{R}^\Delta = (a_{k,l})_{(k,l)\in\Delta} \to E_n \quad (a_{k,l})_{(k,l)\in\Delta} \longmapsto P(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Delta} a_{k,l}x^k y^l$

u est linéaire surjective (par def de E_n), et par b) appliquée à $\Omega = \mathbb{R}^2$, elle est injective.

Donc u est un isomorphisme et $\dim E_n = \dim(\mathbb{R}^\Delta) = \operatorname{card}\Delta_n$.

Variante : $(x^k y^l)_{(k,l)\in\Delta}$ est génératrice de E_n (par définition) et libre (par b)), donc est une base de E_n.

Exercice C

1) Posons $m = \dfrac{1}{2}(y+z)$. On a $\|x-y\|^2 = \|x-m\|^2 + 2\langle x-m, m-y\rangle + \|m-y\|^2$.

De même $\|x-z\|^2 = \|x-m\|^2 + 2\langle x-m, m-z\rangle + \|m-z\|^2$.

Comme $m-y = -(m-z) \neq \overrightarrow{0}$, on obtient $\dfrac{1}{2}\|x-y\|^2 + \dfrac{1}{2}\|x-z\|^2 = \|x-m\|^2 + 2\|m-y\|^2 > \|x-m\|^2$.

$\left\| x - \dfrac{1}{2}(y+z) \right\|^2 < \dfrac{1}{2}\|x-y\|^2 + \dfrac{1}{2}\|x-z\|^2$.

2) L'application $f : C \to \mathbb{R} \quad z \longmapsto \|x-z\|$ est continue (car 1-lipschitzienne). On a $d(x,C) = \inf f$.

Comme C est compact, f atteint sa borne inférieure et il existe donc $y \in C$ tel que $d(x,C) = \|x-y\|$.

Montrons l'unicité : Supposons qu'il existe $z \in C$ distinct de C tel que $\|x-z\| = \|x-y\|$.

Comme C est convexe, $\frac{1}{2}(y+z) \in C$, et par a), on a $\left\|x - \frac{1}{2}(y+z)\right\| < d(x,C)$, ce qui est absurde.

3) a) On a $\forall t \in [0,1]$, $\|x-(y+tv)\|^2 \geq \|x-y\|^2$.

Or, $\|x-(y+tv)\|^2 = \|x-y\|^2 - 2t\langle x-y, v\rangle + t^2\|v\|^2$. Donc $-2t\left\langle x-x', v\right\rangle + t^2\|v\|^2 \geq 0$.

En considérant le signe en 0^+, on obtient donc $\langle x-y, v\rangle \leq 0$.

b) Posons $v = \pi(y) - \pi(x)$. Comme C est convexe, on a $[\pi(x), \pi(y)] \subset C$, donc $\forall t \in [0,1]$, $\pi(x) + tv \in C$.

Par définition de $\pi(x)$, on a $\forall t \in [0,1]$, $\|x - (\pi(x)+tv)\| \geq \|x - \pi(y)\|$.

Par a), on a donc $\langle x - \pi(x), v\rangle \leq 0$, c'est-à-dire $\langle x-\pi(x), \pi(y)-\pi(x)\rangle \leq 0$.

4) a) On a $x - y = x - \pi(x) + \pi(x) - \pi(y) + \pi(y) - y$.

Donc $\langle x-y, \pi(x)-\pi(y)\rangle = \|\pi(x)-\pi(y)\|^2 + \langle x-\pi(x), \pi(x)-\pi(y)\rangle + \langle \pi(y)-y, \pi(x)-\pi(y)\rangle$.

Or, par b), $\langle x-\pi(x), \pi(x)-\pi(y)\rangle \geq 0$ et de même $\langle \pi(y)-y, \pi(x)-\pi(y)\rangle = \langle y-\pi(y), \pi(y)-\pi(x)\rangle \geq 0$.

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient $\|\pi(x)-\pi(y)\|^2 \leq \|\pi(x)-\pi(y)\|\,\|x-y\|$.

Donc $\|\pi(x)-\pi(y)\| \leq \|x-y\| \quad$ (y compris dans le cas où $\|\pi(x)-\pi(y)\| = 0$).

Donc l'application $\pi : E \to E$ est 1-lipschitzienne.