Interrogation n°23. *Barème sur 23 pts*

Exercice A

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, strictement positive et telle que $t \longmapsto tf(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

1) [1.5 pt] Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. On pose $M = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$, et on a $M > 0$.

Dans la suite, on pose $\forall x \geq 0$, $\boxed{F(x) = \int_0^x f(t)\ dt}$.

2) [1.5 pt] Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique réel x tel que

$$\int_0^x f(t)\ dt = \frac{k}{n} M$$

On note ce réel $x_{k,n}$.

3) [2.5 pts] Soit $g : [0, M[\to [0, +\infty[\quad x \longmapsto g(x)$ positive, croissante, continue et intégrable.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall \theta \in [0, 1[$, $\varphi_n(\theta) = g\left(\dfrac{\lfloor n\theta \rfloor}{n} M\right)$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi_n(\theta)\ d\theta = \int_0^1 g(\theta M)\ d\theta$.

4) [1.5 pt] Avec les notations de 3), montrer que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\dfrac{k}{n} M\right) = \dfrac{1}{M} \int_0^M g(x)\ dx$.

5) [2 pts] Déduire des questions précédentes que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x_{k,n} = \dfrac{\int_0^{+\infty} t\ f(t)\ dt}{\int_0^{+\infty} f(t)\ dt}$.

Indication : Faire intervenir l'application F^{-1}, bijection réciproque de F.

Exercice B. Polynômes de deux variables (*extrait Centrale PSI*)

1) [1.5 pt] Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_n l'ensemble des couples d'entiers $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k + l \leq n$.

Calculer $\operatorname{card} \Delta_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle fonction polynomiale de degré total $\leq n$ toute application $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad P(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Delta_n} a_{k,l} x^k y^l$$

On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré total $\leq n$.

2) Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

a) [1 pt] Montrer que Ω contient une partie de la forme $I \times J$, où I et J sont deux intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$.

Remarque : La présence d'un dessin sera appréciée, mais ne constitue pas en tant que telle une preuve.

b) [2.5 pts] Soit $(a_{k,l})_{(k,l)\in\Delta_n} \in \mathbb{R}^{\Delta_n}$. On pose $P(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Delta_n} a_{k,l} x^k y^l$.

On suppose $\forall (x, y) \in \Omega$, $P(x, y) = 0$. Montrer que tous les coefficients $a_{k,l}$ sont nuls.

Indication : Utiliser des polynômes d'une variable.

c) [1 pt] Déterminer la dimension de E_n.

Exercice C. Projection sur un convexe compact

On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire euclidien canonique $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit C un convexe fermé, borné et non vide de E.

1) [2 pts] Soient x, y et $z \in E$, avec $y \neq z$. Montrer que $\left\| x - \frac{1}{2}(y+z) \right\|^2 < \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + \frac{1}{2}\|x-z\|^2$.

2) [1.5 pt] Soit $x \in E$. On pose $d(x, C) = \inf\{\|x - z\|,\ z \in C\}$.

Montrer qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. On note $\pi(x)$ ce vecteur.

3) Soit $x \in E$.

a) [1 pt] Soient y, $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall t \in [0, 1]$, $\|x - (y + tv)\| \geq \|x - y\|$. Montrer que $\langle x - y, v\rangle \leq 0$.

b) [1.5 pt] Montrer que pour tout $y \in E$, on a $\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x)\rangle \leq 0$.

4) a) [1 pt] Soient $x, y \in E$. Montrer que $\|\pi(x) - \pi(y)\|^2 \leq \langle x - y, \pi(x) - \pi(y)\rangle$.

b) [1 pt] Montrer que l'application $\pi : E \to E$ est 1-lipschitzienne.