Interrogation n°22 bis

$\boxed{\textbf{Exercice A}}$ (inspiré de X-ESPCI 2005)

On considère $u : C^2([-1,1],\mathbb{R}) \to C^0([-1,1],\mathbb{R})$ définie par

$$u(f)(x) = \frac{d^2}{dx^2}\left((x^2-1)f(x)\right)$$

1) On note u_n la restriction de u à $E_n = \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que u_n est diagonalisable et préciser $\mathrm{Sp}(u_n)$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche les solutions de $u(f) = \lambda f$ développables en série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

a) Écrire une relation de récurrence reliant c_n et c_{n+2}.

b) Étudier la convergence des séries entières $\sum c_{2k}x^{2k}$ et $\sum c_{2k+1}x^{2k+1}$.

Préciser dans quels cas les solutions sont des polynômes.

c) Décrire l'ev F des solutions dans $C^2(]-1,1[,\mathbb{R})$. Que dire des solutions dans $C^2([-1,1],\mathbb{R})$?

$\boxed{\textbf{Exercice B. Inégalité de Hölder}}$

Soient deux réels strictement positifs p et q tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1) Soient x et $y \geq 0$. Montrer à l'aide d'une inégalité de convexité que $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$.

2) Soient X et Y deux v.a. réelles à valeurs positives telles que $E(X^p) < +\infty$ et $E(Y^q) < +\infty$.

Montrer que $E(XY) \leq E(X^p)^{1/p}E(Y^q)^{1/q}$.

Indication : Se ramener au cas où $E(X^p) = E(Y^q) = 1$.

$\boxed{\textbf{Exercice C. Variable aléatoire à valeurs vectorielles}}$

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ une v.a. à valeurs vectorielles dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

On suppose que $E(\|X\|^2) < +\infty$ et $E(X) = \overrightarrow{0}$, c'est-à-dire $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $E(X_i) = 0$.

1) Pour $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\boxed{Y_v = \langle v, X\rangle}$.

Montrer que $E(Y_v) = 0$ et exprimer $E((Y_v)^2)$ en fonction des v_i et des $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

2) On considère la matrice symétrique $M = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.

Montrer que M est positive, c'est-à-dire $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, Mv\rangle \geq 0$.

3) Exprimer $\sup_{\|v\|=1} E((Y_v)^2)$ en fonction des valeurs propres de M.

4) Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les n variables aléatoires réelles Y_v, pour $v \in \mathcal{B}$, sont deux à deux non corrélées.

Exercice D. Minimisation de distance quadratique

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique.

Pour $X \in \mathbb{R}^p$, on pose

$$f(X) = \|AX - B\|^2$$

1) a) *En utilisant la notion de distance*, montrer qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(X_0) = \inf f$.

Donner une CNS sur A pour que X_0 soit unique (quelle soit que la valeur de B).

b) Soit $X \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $f(X) = \inf f$ ssi $A^T AX = A^T B$.

2) *On propose ici une autre approche, utilisant l'étude de f comme fonction de p variables.*

Soit $X \in \mathbb{R}^p$.

a) Déterminer la valeur de $\operatorname{grad} f(X)$, qui désigne le gradient de la fonction f au point X.

b) En déduire que pour que f admette un minimum en X, il faut que $A^T AX = A^T B$.

c) Montrer que si X vérifie $A^T AX = A^T B$, alors $f(X) = \inf f$.

Exercice E. Décompositions de Cholesky et d'Iwasawa par les matrices de Givens

1) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R_\theta = \left(\begin{array}{c|c} \cos\theta & -\sin\theta \\ \hline \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $A = \left(\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline b & d \end{array}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe θ tel que $R_\theta A$ est triangulaire inférieure.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour $1 \leq i < j \leq n$ et $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice de Givens $G_{i,j,\theta}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\begin{cases} \forall k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}, \ \ G_{i,j,\theta} E_k = E_k \\ G_{i,j,\theta} E_i = (\cos\theta) E_i + (\sin\theta) E_j \\ G_{i,j,\theta} E_j = -(\sin\theta) E_i + (\cos\theta) E_j \end{cases}$$

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe un produit de matrices de Givens R telle que RA est triangulaire inférieure.

3) *En déduire* les deux décompositions suivantes :

a) Décomposition de Cholesky : Toute matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ symétrique définie positive s'écrit sous la forme $S = L^T L$, où $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure.

Attention : On rappelle (*admis ici*) que S est une matrice de Gram, c'est-à-dire $S = P^T P$, où $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

b) Décomposition d'Iwasawa : Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ inversible s'écrit sous la forme $A = UT$, où U est une matrice orthogonale et T est une matrice triangulaire supérieure.