Interrogation n°22. Corrigé

Exercice A

1) a) L'inégalité est évidente en distinguant les cas $|x| \leq 1$ et $|x| \geq 1$.

X^n est d'espérance finie donc $\sum a_n |x_n|^p$ converge. Or, on a $a_n |x_n|^k \leq a_n + a_n |x_n|^p$.

Par comparaison, $\sum a_n |x_n|^p$ converge, c'est-à-dire X^k d'espérance finie.

b) e^{itX} est d'espérance finie car $\left|e^{itX}\right| \leq 1$.

Par transfert, on a $\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(itx_n)$. Posons $g_n(t) = a_n \exp(itx_n)$.

On a g_n de classe C^p et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $g_n^{(k)}(t) = a_n(ix_n)^p \exp(itx_n)$.

On a $\left|g_n^{(k)}(t)\right| \leq a_n |x_n|^k$.

- Les séries $\sum g_n^{(k)}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}$ (en fait normalement).
- La série $\sum g_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, car $\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|g_n^{(p)}(t)\right| = a_n |x_n|^p$.

Donc ϕ_X est de classe C^n, et on a $\phi^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(ix_n)^p = i^p \ E(X^p)$.

c) Supposons X symétrique. Alors $\exp(itX)$ et $\exp(-itX)$ ont même loi.

Donc a fortiori $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{\phi_X(t) = \phi_X(-t)}$,c'est-à-dire ϕ_X paire.

Par le théorème du transfert, on a $\phi_X(t) = \sum_{x\in E} P(X = x)e^{itx}$, où $E = \operatorname{Im} X$.

Donc $\phi_X(-t) = \sum_{x\in E} P(X = x)e^{-itx} = \overline{\phi_X(t)} \in \mathbb{R}$. Donc $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

Variante : $2\phi_X(t) = E(e^{itX} + e^{-itX}) = 2E(\cos(tX)) \in \mathbb{R}$.

2) a) On considère l'opérateur de dérivation D sur $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On note $\varphi_k : t \longmapsto \exp(i\lambda_k t)$. On a $D(\varphi_k) = i\lambda_k \varphi_k$.

Ainsi, les φ_k sont des valeurs propres de D associés à des valeurs propres distinctes.

Donc $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est libre. Or, $\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k = 0$. Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = 0$.

Variante : On dérive n fois la relation $\sum_{k=1\alpha k}^n \varphi_k(t) = 0$, et on prend la valeur en $t = 0$.

On obtient ainsi $\forall j \in [\![0, n-1]\!]$, $\sum_{k=1}^n (\lambda_k)_k^j \alpha = 0$. Il s'agit d'un système linéaire homogène de Van der Monde, inversible car les λ_k sont distincts. Donc les α_k sont nuls.

b) Quitte à ajouter des valeurs, on prend X à valeurs dans $\{-x_n, ..., -x_1, x_0, x_1, ..., x_n\}$, avec $x_0 = 0$.

Supposons $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\phi_X(t) = \overline{\phi_X(t)}$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=-n}^n a_k e^{itx_k} = \sum_{k=-n}^n a_k e^{-itx_k}$, où $a_k = P(X = x_k)$.

On a donc $\sum_{k=-n}^n a_k e^{itx_k} = \sum_{k=-n}^n a_{-k} e^{itx_k}$, donc $\sum_{k=-n}^n (a_k - a_{-k})e^{itx_k} = 0$.

On déduit de 2) que $\forall k \in [\![-n, n]\!]$, $a_k - a_{-k} = 0$. Ainsi, X est symétrique.

c) Supposons $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

Comme $a_n = \overline{a_n}$, alors $a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\phi_X(t)\ e^{-int}}\ dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi_X(t)\ e^{int}\ dt = a_{-n}$.

3) a) On a $\phi_X(h) = \phi_X(0) + h\phi_X'(0) + \dfrac{h^2}{2}\phi_X''(0) + \mathfrak{o}\left(h^2\right)$.

D'où„par calcul, $f(h) = \dfrac{-4h^2\phi_X''(0) + \mathfrak{o}\left(h^2\right)}{4h^2} = -\phi_X''(0) + \mathfrak{o}\left(1\right)$, donc $\lim_{h\to 0, h>0} f(h) = -\phi_X''(0)$.

b) On a pour tout $h > 0$, $f(h) = E\left(\dfrac{2 - 2e^{i2hX}}{4h^2}\right) = E\left(\dfrac{\sin(hX)^2}{h^2}\right)$.

Par transfert, on a donc $f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ \dfrac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

c) Posons $g_n(h) = a_n\ \dfrac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$. On a $\lim_{h\to 0, h>0} g_n(h) = a_n(x_n)^2$.

On va prouver que $\lim_{h\to 0, h>0} f(h) = \lim_{h\to 0, h>0} \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{h\to 0, h>0} g_n(h)$.

On ne pas utiliser le th de la double limite : on a $\sup_{h>0} g_n(h) = a_n x_n^2$, mais on ne sait pas si $\sum a_n x_n^2$ converge, car c'est justement ce que l'on veut prouver ...

En fait, on utilise la positivité des g_n : on a $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0, h>0} \sum_{n=0}^{N} g_n(h)$.

Comme $\sum_{n=0}^{N} g_n(h) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(h)$, alors $\lim_{h\to 0, h>0} \sum_{n=0}^{N} g_n(h) \leq \lim_{h\to 0, h>0} f(h) = -\phi_X(0)$.

Donc $\sum_{n=0}^{N} a_n x_n^2 \leq -\phi_X(0)$. Par le th de la limite monotone, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n^2 < +\infty$, donc X^2 d'espérance finie.

Exercice B

1) Les colonnes de $J_f(X)$ forment une BON, donc $\forall (j,k)$, $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X) \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X)\right) = \delta_{ij}$ constantes.

Donc les dérivées partielles sont nulles.

On obtient ainsi $\forall k$, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X)\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X) \mid \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(X)\right) = 0$.

2) On a $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_k}\right) = -\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j} \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_k}\right) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) = -\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k} \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right)$.

Donc $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X)\right) = 0$.

3) Le vecteur $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$ est orthogonal aux vecteurs $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X)$ qui forment une BON de $\mathbb{R}^n$.

Donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$ est orthogonal à tout vecteur (par linéarité), donc est nul.

4) Donc les $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont constantes, donc la jacobienne de f est constante et on a $J_f(X) = A \in O_n(\mathbb{R})$.

Alors $X \longmapsto f(X) - AX$ est de jacobienne nulle, donc est constante. Donc $f(X) = AX + B$.

Réciproquement, si $f(X) = AX + B$, où $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a immédiatement $\forall X$, $J_f(X) = A \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice C

1) Tout endomorphisme admet au moins un valeur propre (car E est un $\mathbb{C}$-ev et $\dim E \geq 1$).

donc $\mathrm{Sp}(u)$ est non vide et fini (de cardinal $\leq n$) donc u admet une valeur propre de partie réelle maximale.

2) On a $[u, w] = -2w$, donc $u \circ w(x_k) = -2w(x_k) + w(u(x_k))$, c'est-à-dire $u(x_{k+1}) = -2x_{k+1} + w(u(x_k))$.

On montre par récurrence sur k que $u(x_k) = (\lambda - 2k)x_k$. La propriété est vraie pour $k = 0$ car $u(x_0) = \lambda x_0$.

Si elle est vraie au rang k, alors $u(x_{k+1}) = -2x_{k+1} + w((\lambda - 2k)x_k) = (\lambda - 2k - 2)x_{k+1}$. D'où le résultat.

3) $u(v(x_0)) = (\lambda + 2)v(x_0)$. Par définition de λ, $\lambda + 2$ n'est pas valeur propre, donc $v(x_0) = \overrightarrow{0}$.

4) On a $v(x_{k+1}) = w(v(x_k)) + u(x_k)$. On montre $v(x_k) = k(\lambda + 1 - k)x_{k-1}$ par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$.

La propriété est vraie pour $k = 0$, en posant $x_{-1} = \overrightarrow{0}$. Supposons la vraie an rang $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$v(x_{k+1}) = w(v(x_k)) + u(x_k) = k(\lambda + 1 - k)x_k + (\lambda - 2k)x_k = (k+1)\lambda + (k - k^2 - 2k) = (k+1)(\lambda - k)x_k$.

5) Posons $p = \max\{p \in \mathbb{N}^* \mid (x_0, x_1, ..., x_{p-1})\}$ est libre. Comme $x_0 \neq \overrightarrow{0}$ et $(x_0, x_1, ..., x_n)$ liée, p existe.

$F = \text{Vect}(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ est stable par w, car $\forall k \leq p$, $w(x_{k-1}) = x_k \in F$.

Par 2) et 4), F est stable par u et v. Comme (u, v, w) est irréductible, $\boxed{F = E}$, c'est-à-dire $p = n$.

Les x_k, avec $0 \leq k < n$, sont des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes.

Donc u est diagonalisable et par 2), on a $x_k = \overrightarrow{0}$ pour tout $k \geq n$. En particulier, $x_n = \overrightarrow{0}$.

6) x_{n-1} est non nul et $x_n = \overrightarrow{0}$, donc la relation $v(x_n) = n(\lambda + 1 - n)x_{n-1}$ implique $\lambda = n - 1$.

7) Soit F un sev non nul de E stable par u, v et w. On veut montrer que $F = E$.

L'idée est de commencer par montrer que nécessairement $\boxed{x_0 \in F}$.

Considérons $y \in F$ non nul. Il existe un plus grand entier p tel que $v^p(y) \neq \overrightarrow{0}$.

En effet, v est nilpotent (car $\forall k$, $v^{n-1}(x_k) = 0$), donc $v^k(y) = \overrightarrow{0}$ pour k assez grand.

De plus, comme les μ_k ne sont pas nuls, alors $\text{Ker}\, v = \mathbb{C}x_0$.

Comme $v^{p+1}(y) = \overrightarrow{0}$., alors $v^p(y) \in \text{Ker}\, v$, donc $\mathbb{C}x_0 = \mathbb{C}v^p(y)$, et ainsi $x_0 \in F$ (car F stable par v).

Comme $x_k = w^k(x_0)$, alors $\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, $x_k \in F$ (car F stable par w). Donc $F = E$.