Interrogation n°22. *Barème sur 25 pts*

Exercice A. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On suppose $\operatorname{Im} X \subset \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ et on pose $a_n = P(X = x_n)$. On pose $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{\phi_X(t) = E(e^{itX})}$.

On dit que X est symétrique si X et $-X$ ont même loi.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose X^p d'espérance finie.

a) [1 pt] Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x|^k \leq 1 + |x|^p$ .En déduire que X^k est d'espérance finie.

b) [1.5 pt] Montrer que ϕ_X est de classe C^p et exprimer $\phi_X^{(p)}(0)$ de façon simple.

c) [1.5 pt] Montrer que si X est symétrique, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on s'intéresse aux réciproques de b) et c).

2) a) [1.5 pt] Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels distincts, et des réels α_k. On note $\varphi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \longmapsto \exp(i\lambda_k t)$.

On suppose $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(t) = 0$. Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k = 0$.

b) [1.5 pt] On suppose ici que X prend un nombre fini de valeurs.

Montrer la réciproque de 1) c) : si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$, alors X est symétrique.

c) [0.5 pt] On suppose ici que X à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On montre (*admis*) que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $P(X = n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_X(t)\, e^{-int}\, dt$.

Montrer la réciproque de 1) c) : si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) \in \mathbb{R}$, alors X est symétrique.

3) On suppose ϕ_X de classe C^2. On va démontrer que X est de moment d'ordre 2 fini.

a) [1 pt] On note f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $\forall h > 0$, $f(h) = \dfrac{2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h)}{4h^2}$.

Déterminer la limite de f en 0^+.

b) [1 pt] Montrer que pour tout $h > 0$, $f(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

c) [1.5 pt] (★) En déduire la réciproque de 1) b) : X est de moment d'ordre 2 fini.

Exercice B. Fonctions de jacobienne isométrique

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, noté $(\ \mid\ )$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad X = (x_1, ..., x_n) \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix}$ de classe C^2.

On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, **la matrice jacobienne est orthogonale**, c'est-à-dire

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad J_f(X) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X) \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(X) \right)_{1 \leq j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$$

Remarque : Les $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X)$ sont les vecteurs colonnes de la matrice jacobienne.

1) [1.5 pt] Montrer que $\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \mid \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(X)\right) + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X) \mid \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(X)\right) = 0.$

2) [1.5 pt] En déduire que

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \mid \frac{\partial f}{\partial x_k}(X)\right) = 0$$

3) [1.5 pt] Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$

4) [1.5 pt] Déterminer LES fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $\forall X \in \mathbb{R}^n, \ J_f(X) \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice C. Représentations du groupe de Lorentz

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Pour u et $v \in \mathcal{L}(E)$, on pose $[u,v] = u \circ v - v \circ u$, appelé *crochet de Lie* de u et v. D'autre part, une famille d'endomorphismes $(u_i)_{i \in I}$ est dite **irréductible** ssi les seuls sev de E stables par tous les u_i sont $\{0\}$ et E.

Soit (u,v,w) une famille *irréductible* de $\mathcal{L}(E)$ telle que $\begin{cases} [u,v] = 2v \\ [u,w] = -2w \\ [v,w] = u \end{cases}$

1) [1 pt] Justifier l'existence d'une valeur propre λ de u telle que $\forall z \in \mathrm{Sp}(u)$, $\mathrm{Re}\, z \leq \mathrm{Re}\, \lambda$.

Dans la suite, on considère un vecteur x_0 non nul tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.

2) [1 pt] On pose $x_k = w^k(x_0)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $u(x_k) = (\lambda - 2k)x_k$.

3) [1.5 pt] Montrer que $v(x_0) = \overrightarrow{0}$.

4) [1.5 pt] Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $v(x_k) = k(\lambda + 1 - k)x_{k-1}$

5) [2 pts] Montrer que u est diagonalisable et que $x_k = \overrightarrow{0}$ pour tout $k \geq n$.

6) [1 pt] Montrer que $\lambda = n - 1$.

7) *Question supplémentaire*

Réciproquement, soient $u, v, w \in \mathcal{L}(E)$ et une base $\mathcal{B} = (x_0, ..., x_{n-1})$ de E tels que

$$\begin{cases} \forall k \in \{0,1,...,n-1\},\ u(x_k) = \lambda_k x_k, \text{ avec } \lambda_k = (n-1-2k) \\ v(x_0) = \overrightarrow{0} \text{ et } \forall k \in \{1,...,n-1\},\ v(x_k) = \mu_k x_{k-1}, \text{ avec } \mu_k = k(n-k) \\ \forall k \in \{0,1,...,n-2\},\ w(x_k) = x_{k+1} \text{ et } w(x_{n-1}) = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

On vérifie aisément (*admis* ici) que u, v, w vérifient les relations $\begin{cases} [u,v] = 2v \\ [u,w] = -2w \\ [v,w] = u \end{cases}$

Montrer que (u,v,w) est irréductible.