Interrogation n°21. Corrigé

Exercice A

1) αI_n n'est semblable qu'à elle-même (donc a fortiori orthosemblable qu'à elle-même).

2) Supposons $T = U^{-1}SU$ orthosemblable à S. Alors $T = U^T SU$ est symétrique.
Donc toute matrice orthosemblable à S est symétrique et a même polynôme caractéristique que S.

Réciproquement, si T est symétrique et a même polynôme caractéristique, alors S et T sont diagonalisables dans des BON $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ avec la même matrice diagonale, donc $T = U^{-1}SU$ avec $U = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in O_n(\mathbb{R})$.

3) a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A de valeurs propres respectives 0 et 2.
On pose $V = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ dont les forment une BON de vecteurs propres de A.
On a ainsi $VAV^{-1} = D$, c'est-à-dire $A = U^{-1}DU$, où $U = V^{-1} = V^T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in O_2'\mathbb{R})$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ admet 1 et 2 comme valeurs propres (racines de χ_A), donc est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Il résulte de 1) b) que A symétrique n'est pas orthosemblable à B qui n'est pas symétrique.

4) a) On cherche $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ telle que $R^{-1}AR = A^T$, c'est-à-dire $AR = A^T R$.
On obtient la CNS : $(a-d)\sin\theta = (b+c)\cos\theta$.

Il suffit donc de choisir θ tel que $(\cos\theta, \sin\theta)$ colinéaire à $(b+c, a-d)$.

b) Soit $U \in O_2^+(\mathbb{R})$.
On a $UAU^T = USU^T + UBU^T$. Mais $B = \lambda R$, où $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de rotation.
Donc $UBU^T = UU^T B = B$. D'autre part, USU^T est symétrique et $A^T = S - B$.

Donc $UAU^T = A^T$ implique $B = O_2$, c'est-à-dire A symétrique. La réciproque est immédiate.

Autre approche : On suppose $R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ telle que $R^{-1}AR = A^T$.
En explicitant $AR = RA^T$, on montre qu'on a nécessairement $A = A^T$.

Exercice B

1) a) on note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propre de A, avec $\lambda_1^2 \geq \lambda_2^2 \geq ... \geq \lambda_n^2$.
On se place dans une BON formée de vecteurs propres de A.
En notant $(x_1, ..., x_n)$ les coordonnées de x dans cette base, on a $\|Ax\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 x_i^2$.
Donc $\|Ax\|^2 \leq \lambda_1^2 \|x\|^2$. Avec égalité lorsque x est un vecteur propre de valeur propre λ_1.
Donc $N_2(A) = |\lambda_1| = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

b) Il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $N_2(A) = |\lambda|$. Notons $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur propre.
On a $Ax = \lambda x$, donc $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$. On considère i tel que $|x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.
Comme x n'est pas nul, alors $|x_i| > 0$, donc $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \left|\dfrac{x_j}{x_i}\right| \leq \sum_{j=1}^n 1 = n$. D'où $N_2(A) \leq n$.

c) Si on a égalité, on a nécessairement dans l'inégalité précédente les $|x_j|$ égaux.
Quitte à diviser x par une constante non nulle, on peut supposer que $\forall j$, $|x_j| = 1$.
Comme $\forall i$, $nx_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$, alors les $a_{ij} x_j$ sont de même signe que x_i et $a_{ij} = \pm 1$.
Donc $a_{ij} = x_i x_j$, c'est-à-dire $A = XX^T$.

Réciproquement si $A = XX^T$ avec X vecteur appartenant à $\{-1,1\}^n$, alors A admet bien X comme vecteur propre de valeur propre n (car $AX = XX^TX = X\|X\|^2 = nX$) et ainsi $N_2(A) = n$.
En conclusion, les cas d'égalité sont les matrices symétriques de rang 1 à coefficients dans $\{-1,1\}$.

2) On a $\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{2^n n!} = \exp\left(\dfrac{1}{2}t^2\right)$,

car $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n n! = 2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n) \leq (2n)!$

3) a) On a par la formule du transfert $E(\exp(vY)) = \dfrac{1}{2}(e^v + e^{-v}) = \mathrm{ch}\, v$.

b) On a $u\ x^T Ax = \sum_{i,j} uA_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^n uA_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} uA_{ij}x_ix_j$.

Comme les v.a. A_{ij}, avec $i \leq j$, sont indépendantes, les $\exp(ux_ix_jA_{ij})$ le sont aussi.

Donc $E(\exp(u\ x^TAx)) = \prod_{i=1}^n E(ux_i^2A_{ii}^2)\prod_{i<j} E(2ux_ix_jA_{ij}) = \prod_{i=1}^n \mathrm{ch}(ux_i^2)\prod_{i<j}\mathrm{ch}(2uA_{ij}x_ix_j)$.

c) D'où, avec 2), on obtient :

$E(\exp(u\ x^TAx)) \leq \exp\left(\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n u^2x_i^4 + \dfrac{1}{2}\sum_{i<j}^n 4u^2x_i^2x_j^2\right) \leq \exp\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n u^2x_i^2x_j^2\right)$.

Or, $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n u^2x_i^2x_j^2 = u^2\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) = u^2\|x\|_2^2\|x\|_2^2 = u^2\|x\|_2^4$.
Donc $E(\exp(u\ x^TAx) \leq \exp(u^2\|x\|_2^4)$.

4) a) On a $\forall u > 0$, $P(x^TAx \geq \alpha\sqrt{n}) = P(\exp(u\ x^TAx) \geq \exp(u\alpha\sqrt{n}))$ car $t \longmapsto \exp(ut)$ strict croissante.

On a $\exp(u\ x^TAx)$ variable positive, donc par Markov et par 3) c),

$$P(\exp(u\ x^TAx) \geq \exp(u\alpha\sqrt{n})) \leq \frac{E(\exp(u\ x^TAx))}{\exp(u\alpha\sqrt{n})} \leq \exp\left(\frac{1}{2}u^2\|x\|_2^4 - u\alpha\sqrt{n}\right))$$

b) On choisit $u > 0$ de sorte à minimiser $u \longmapsto \dfrac{1}{2}u^2\|x\|_2^4 - u\alpha\sqrt{n}$.

On prend donc $u = \dfrac{\alpha\sqrt{n}}{2\|x\|_2^4}$, et on déduit de a) l'inégalité demandée.

5) En effet, A et $-A$ ont même loi, donc x^TAx et $-x^TAx$ ont même loi.

Donc $P(x^TAx \leq -\alpha\sqrt{n}) = P(x^TAx \geq \alpha\sqrt{n})$.

Remarque : De façon générale, une somme de variables aléatoires symétriques *et* indépendantes est symétrique.

6) a) Soit $x \in S$. Il existe $k \in [\![1,N]\!]$ tel que $\|x - v_k\|_2 \leq \dfrac{1}{3}$.

Posons $y = x - w_k$. On a $\left|y^TAy\right| = |\langle y, Ay\rangle| \leq \|y\|_2\|Ay\|_2 \leq N_2(A)\|y\|_2^2 \leq \dfrac{1}{9}N_2(A)$.

De même, $\left|w_k^TAy\right| = \left|y^TAw_k\right| \leq N_2(A)\|y\|_2\|w_k\|_2 \leq \dfrac{1}{3}N_2(A)$.
Or, $x^TAx = (y+w_k)^TA(y+w_k) = w_k^TAw_k + y^TAy + w_k^TAy + y^TAw_k$.
Donc $\left|x^TAx\right| \leq \left|w_k^TAw_k\right| + \dfrac{1}{9}N_2(A) + \dfrac{1}{3}N_2(A) + \dfrac{1}{3}N_2(A) \leq M_A + \dfrac{7}{9}N_2(A)$.

b) Par a), $N_2(A) \leq \dfrac{7}{9}N_2(A) + M_A$, donc $N_2(A) \leq \dfrac{9}{2}M_A$, et ainsi $(N_2(A) \geq t) \subset \left(M_A \geq \dfrac{2}{9}t\right)$.

c) $(M_A \geq \beta\sqrt{n}) = \cup_{0 \leq k \leq N}\left(\left|w_k^TAw_k\right| \geq \beta\sqrt{n}\right)$.

La probabilité d'une union est inférieure ou égale à la somme des probabilités.

Donc $P(M_A \geq \beta\sqrt{n}) \leq \sum_{k=1}^N P(w_k^TAw_k \geq \beta\sqrt{n}) \leq 2N\exp\left(-\dfrac{\beta^2 n}{4}\right)$.

Par b), $P(N_2(A) \geq \alpha\sqrt{n}) \leq P(M_A \geq \dfrac{2\alpha}{9}\sqrt{n}) \leq 2N\exp\left(-\dfrac{\alpha^2 n}{81}\right) \leq 2\exp\left(\left(\log 7 - \dfrac{\alpha^2}{81}\right)n\right)$.

Il suffit donc de choisir α tel que $\log 7 - \dfrac{\alpha^2}{81} < 0$, c'est-à-dire $\alpha > 9\sqrt{\log 7}$.