Interrogation n°20 bis. Corrigé

Exercice A

1) $P(A) - P(B) = E(1_A) - E(1_B) = E(1_A - 1_B)$. Or, $|1_A - 1_B| = 1_{A\cap\overline{B}} + 1_{\overline{A}\cap B}$.

Donc $|P(A) - P(B)| = |E(1_A - 1_B)| \leq E(|1_A - 1_B|) = P(A\cap\overline{B}) + P(\overline{A}\cap B)$.

2) On a $\forall t \in [-1,1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |P(X=n) - P(Y=n)|$.

Par a), $|P(X=n) - P(Y=n)| \leq P(X=n, Y\neq n) + P(X\neq n, Y=n)$.

Or, par σ-additivité, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n, Y\neq n) = P(X\neq Y)$ et de même $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X\neq n, Y=n)$.

Donc on obtient bien $\forall t \in [-1,1]$, $|G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X\neq Y)$.

3) Z_n est une v.a. positive et entière. Donc $P(Z_n \neq 0) = P(Z_n \geq 1) \leq E(Z_n)$ par Markov.

4) $(X_n \neq X) = \bigcup_{j\geq n}(Z_j \neq 0)$, donc $P(X_n \neq X) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} P(Z_j \neq 0) \leq \sum_{j=n}^{+\infty} E(Z_j)$ par 1).

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=n}^{+\infty} E(Z_j) = 0$ (reste d'une série cv), donc $\lim_{n\to+\infty} P(X_n \neq X) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = X) = 1$.

La suite des événéments $(X_n = X)$ est croissante et $(X < +\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X_n = X)$.

Par continuité croissante, on a donc $P(X < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} P(X_n = X) = 1$.

5) Par la propriété admise, on a $\sup_{t\in[-1,1]} |G_{X_n}(t) - G_X(t)| \leq 2P(X_n \neq X) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Donc la suite de fonctions $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_X sur $[-1,1]$.

6) Par le cours et indépendance des Z_j, X_n suit une loi de Poisson de paramètre $\mu_n = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j$.

Donc $\forall t \in [-1,1]$, $G_{X_n}(t) = \exp((t-1)\mu_n)$.

Par convergence simple (car uniforme), on a $\forall t \in [-1,1]$, $G_X(t) = \exp((t-1)\mu)$, car $\mu = \lim_{n\to+\infty} \mu_n$.

Comme une série entière admet un unique DSE, alors X suit la loi de Poisson de paramètre μ.

7) a) On a $|1_{X_n>k} - 1_{X>k}| \leq 1_{X_n\neq X}$, car si $X_n(\omega) = X(\omega)$, alors a fortiori $(X_n(\omega) > k)$ ssi $(X(\omega) > k)$.

Donc $|P(X_n > k) - P(X > k)| = |E(1_{X_n>k} - 1_{X>k})| \leq E(|1_{X_n>k} - 1_{X>k}|) \leq E(1_{X_n\neq X}) = P(X_n \neq X)$.

b) Soit $K \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=0}^{K} P(X_n > k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X_n > k) = E(X_n) = \sum_{j=0}^{n} E(Z_j)$.

Par a), $\forall k$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n > k) = P(X > k)$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} P(X_n > k) = \sum_{k=0}^{K} P(X > k)$.

D'où le résultat par passage à la limite des inégalités larges.

c) Par b), la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} P(X_n > k)$ converge, donc X est d'espérance finie et $E(X) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} E(Z_j)$.

L'inégalité réciproque provient du passage à la limite de $\sum_{j=0}^{n} E(Z_j) = E(X_n) \leq E(X)$, car $X_n \leq X$.

Exercice B

On pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = +\infty$.

1) On a $\forall k \in [\![1, n+1]\!]$, $\forall t \in]x_{k-1}, x_k[$, $P(X > t) = \sum_{j=k}^{n} P(X = x_j)$, qu'on note R_k. On a $R_{n+1} = 0$.

Donc $\int_0^{+\infty} pt^{p-1}P(X > t)\ dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} pt^{p-1}R_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k^p - x_{k-1}^p)R_k$.

On conclut par une transformée d'Abel :

$\sum_{k=1}^{n+1}(x_k^p - x_{k-1}^p)R_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^p R_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k^p R_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} x_k^p(R_k - R_{k+1})$ car $x_0 = 0$ et $R_{n+1} = 0$.

On obtient donc bien $\int_0^{+\infty} pt^{p-1}P(X > t)\ dt = \sum_{k=1}^{n} x_k^p P(X = x_k) = E(X^p)$.

2) Par 1), on a $E(X^{2q}) \leq 2aq \int_0^{+\infty} t^{2q-1} \exp(-bt^2)\ dt$.

On affectue le changement de variable $t = \sqrt{u}$, valide car $u \longmapsto \sqrt{u}$ est une bijection C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On obtient $\int_0^{+\infty} t^{2q-1} \exp(-bt^2)\ dt. = \dfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{q-1} \exp(-bu)\ du$. Avec le changement de variable affine $v = bu$ (on a ici $b > 0$), on obtient : $\int_0^{+\infty} u^{q-1} \exp(-bu)\ du = \dfrac{1}{b^q} \int_0^{+\infty} v^{q-1} \exp(-v)\ dv = \dfrac{(q-1)!}{b^q}$.

On obtient donc $E(X^{2q}) \leq 2aq \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(q-1)!}{b^q} = \dfrac{q!\ a}{b^q}$.