Interrogation n°20 bis

Exercice A (*inspiré Centrale MP 2017 et Centrale PSI 2015*)

Soit (Ω,T,P) un espace probabilisé.

1) Soient A et B deux événéments. Montrer que $|P(A)-P(B)| \leq P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$.

Indication : Utiliser $1_A - 1_B$.

2) Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer : $\sup_{t\in[-1,1]} |G_X(t) - G_Y(t)| \leq 2P(X \neq Y)$.

Pour la suite on considère une suite de variables entières $Z_n : \Omega \to \mathbb{N}$ d'espérances finies telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n) < +\infty$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \sum_{j=0}^{n} Z_j$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et à valeurs entières.

Ainsi, $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ est soit stationnaire soit tend vers $+\infty$. On note $X(\omega)$ la valeur limite (finie ou infinie).

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Z_n \neq 0) \leq E(Z_n)$.

4) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = X) = 1$ et en déduire que $P(X < +\infty) = 1$.

Ainsi, X est presque sûrement finie, et on peut considérer X comme une variable à valeurs entières.

5) Montrer que la suite de fonctions $(G_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers G_X sur $[-1,1]$.

6) *Un exemple.* Soit une série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$ de réels strictement positifs.

On suppose ici que les Z_n sont indépendantes, et que Z_n suit la loi de Poisson de paramètre λ_n.

Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n$.

7) On revient au cas général.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|P(X_n > k) - P(X > k)| \leq P(X_n \neq X)$.

Indication : On pourra utiliser des fonctions indicatrices (ou bien la question 1)).

b) Montrer que $\forall K \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{K} P(X > k) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n)$.

c) En déduire que X est d'espérance finie et que $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} E(Z_n)$.

Exercice B

Soit $X : \Omega \to \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{R}^+$ une variable aléatoire à valeurs réelles positives en nombre fini.

1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $E(X^p) = \int_0^{+\infty} pt^{p-1} P(X > t)\ dt$.

2) On suppose qu'il existe deux réels strictement positifs tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $P(X > t) \leq a \exp(-bt^2)$.

Montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $E(X^{2q}) \leq \dfrac{q!\ a}{b^q}$.