Interrogation n°20. Corrigé

Exercice A

1) a) L'application $t \longmapsto (\cos t)^x = e^{x \ln \cos t}$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et tend vers 0 lorsque $t \to 0^+$.

D'où l'existence de $F(x)$ comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

On effectue le changement de variable $t = \varphi(u)$, avec $\varphi : u \longmapsto \arccos u$ bijection C^1 de $[0, 1[$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

On a $dt = \dfrac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$. Donc $F(x) = \int_1^0 \dfrac{-u^x\ du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 \dfrac{u^x}{\sqrt{1-u^2}}\ du$.

b) Posons $\forall u \in]0, 1[,\ f(u, x) = \dfrac{u^x}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{e^{x \ln u}}{\sqrt{1-u^2}}$. On a :

- Pour tout u, l'application $x \longmapsto f(u, x)$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$, et $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(u, x) = \dfrac{(\ln u)^n u^x}{\sqrt{1-u^2}}$.

- Les applications $u \longmapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(u, x) = \dfrac{(\ln u)^n}{\sqrt{1-u^2}}$ sont intégrables sur $]0, 1[$.

En effet, $\dfrac{(\ln u)^n u^x}{\sqrt{1-u^2}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{u}}\right)$ en $u = 0^+$ et $\dfrac{(\ln u)^n u^x}{\sqrt{1-u^2}} = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-u}}\right)$ en $u = 1$.

- Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(u, x)\right| \leq \dfrac{(\ln u)^n}{\sqrt{1-u^2}} = \varphi_n(u)$ et φ_n sont intégrables sur $]0, 1[$.

Donc F est C^∞ sur $[0, +\infty[$, et $F^{(n)}(x) = \int_0^1 \dfrac{(\ln u)^n u^x}{\sqrt{1-u^2}}\ du = \int_0^{\pi/2} (\ln \cos t)^n\ \ dt$, avec $u = \cos t$.

2) Avec $u = 1 - \dfrac{t}{x}$, on a $F(x) = \dfrac{1}{x} \int_0^x \left(1 - \dfrac{t}{x}\right)^x \dfrac{dt}{(2t/x - t^2/x^2)^{1/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} g(t, x)\ dt$.

avec $g(t, x) = \left(1 - \dfrac{t}{x}\right)^x \dfrac{1}{\sqrt{t}(2 - t/x)^{1/2}}$ si $t < x$, et 0 si $t > 0$.

- $\forall t > 0$, $\lim_{x \to +\infty} g(t, x) = \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2t}}$.

- Pour tout $x > 0$, $|g(t, x)| \leq \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$, avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

(Remarque : l'inégalité résulte de $\forall t < x,\ \ x \ln\left(1 - \dfrac{t}{x}\right) \leq -t$ et de $2 - \dfrac{t}{x} \geq 1$).

Par cv dominée, $\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} g(t, x)\ dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{2t}}\ dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Donc $F(x) \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$.

3) $F(x+2) = \left[-u^{x+1}\sqrt{1-u^2}\right]_0^1 + (x+1) \int_0^1 \dfrac{u^x - u^{x+2}}{\sqrt{1-u^2}}\ du = (x+1)\left(F(x) - F(x+2)\right)$.

Donc $F(x+2) = \dfrac{x+1}{x+2} F(x)$. Donc $F(x+2n) = F(x) \prod_{k=1}^n \left(\dfrac{x+2k-1}{x+2k}\right)$.

Par 2), on a $F(x+2n) \sim_{+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$, on conclut que $\prod_{k=1}^n \left(\dfrac{x+2k-1}{x+2k}\right) \sim \dfrac{1}{2F(x)} \sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

4) a) **-** On obtient $\int_0^1 (\ln u)^n\ du = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ dt = (-1)^n n!$, avec $u = e^{-t}$.

Comme $u \longmapsto (\ln u)^n$ est de signe constant, $\int_0^1 |\ln u|^n\ \ du = n!$.

Remarque : On peut aussi calculer $\int_0^1 (\ln u)^n\ du$ par IPP.

- D'autre part, $\int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du = [\arcsin u]_0^{\pi/2} = 1$.

b) On coupe l'intégrale en deux : sur chaque partie, l'une des fonctions est bornée et l'autre intégrable :

On a $\forall u \leq \dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{|\ln u|^n}{\sqrt{1-u^2}} \leq \sqrt{2}\,|\ln u|^n$ et $\forall u \geq \dfrac{1}{2},\ \ \dfrac{|\ln u|^n}{\sqrt{1-u^2}} \leq \dfrac{(\ln 2)^n}{\sqrt{1-u^2}}$.

Donc $F^{(n)}(0) \leq \sqrt{2}\,|\ln u|^n + \dfrac{(\ln 2)^n}{\sqrt{1-u^2}} = O(n!) + O(1) = O(n!)$.

c) On a $\dfrac{u^x}{\sqrt{1-u^2}} = \dfrac{e^{x \ln u}}{\sqrt{1-u^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n(u)$, avec $\omega_n(u) = \dfrac{(\ln u)^n x^n}{n! \sqrt{1-u^2}}$.

On a $\int_0^{+\infty} |\omega_n(u)| \ du = O(x^n)$ lorsque $n \to +\infty$ par b).

On en déduit que pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |\omega_n(u)| \ du$ converge.

Par le théorème ITT, on a pour $|x| < 1$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{(\ln u)^n}{n!\sqrt{1-u^2}} \ du$.

Remarque : La majoration de $F^{(n)}(0)$ en tant que telle ne permet pas de prouver que f est DSE.

Exercice B

1) Par l'IAF (inégalité des accroissements finis), $\forall x \in [0,1]$, $|f(x) - f(a_1)| \leq |x - a_1| \, \|f'\|_\infty$.
Comme x et $a_1 \in [0,1]$., alors $|f(x) - f(a_1)| \leq \|f'\|_\infty$, donc $|f(x)| \leq \|f'\|_\infty + |f(a_1)|$.
Donc $C_1 = 1$ convient.

Variante : On peut aussi utiliser $f(x) = f(a_1) + \int_{a_1}^x f'(t) \ dt$, d'où on déduit $|f(x)| \leq \|f'\|_\infty + |f(a_1)|$.

2) a) Par le TAF, il existe $y \in]a_1, a_2[$ tel que $\dfrac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} = f'(y)$.
Par le raisonnement du a) appliqué à f', on a bien $|f'(x) - f'(y)| \leq \|f''\|_\infty$.
b) Il résulte de a) que $|f'(x)| \leq \|f''\|_\infty + \left| \dfrac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \right|$.
Donc $\|f'\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + K \ |f(a_1)| + K \ |f(a_2)|$, où $K = \dfrac{1}{|a_2 - a_1|}$.
Il résulte de a) que $C_1 + 1 + K$ et $C_2 = K$ conviennent.

3) a) u est linéaire, injectif (car tout polynôme non nul de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ admet au plus $(p-1)$ racines) et donc bijectif par dimension (car $\dim \mathbb{R}_{p-1}[X] = \dim \mathbb{R}^p$).

On prend $L_k = u^{-1}(E_k)$, où $(E_1, ..., E_p)$ base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Avec $P(x) = \sum_{k=1}^p f(a_k) L_k(x)$, on a par linéarité $u(P) = \sum_{k=1}^p f(a_k) E_k$, c'est-à-dire $P(a_k) = f(a_k)$ pour tout k.

b) Posons $g = f - P$. La fonction g est de classe C^∞ et s'annule en les p points $a_1, ..., a_p$.
On montre par récurrence sur k que $g^{(k)}$ admet au moins $(p-k)$ zéros : pour $k < p$, on prouve la propriété pour $g^{(k+1)}$ en appliquant le lemme de Rolle sur chaque intervalle défini par les $(p-k)$ zéros de $g^{(k)}$ classés par ordre croissant (de sorte à obtenir $(p-k-1)$ zéros distincts.

c) Il résulte de 1) que si $h \in E$ s'annule (au moins une fois), alors $\|h\|_\infty \leq \|h'\|_\infty$.
On applique cette propriété à tous les $g^{(k)} = f^{(k)} - P^{(k)}$ qui par b), admettent au moins un zéro (pour $k < p$).

4) Avec les notations de 3), on a, $\|g\|_\infty \leq \|g'\|_\infty \leq ... \leq \left\|g^{(p)}\right\|_\infty$, où $g = f - P$.
Comme $P^{(p)} = 0$, alors $\|f - P\|_\infty \leq \left\|f^{(p)}\right\|_\infty$.
On a $P(x) = \sum_{k=1}^p f(a_k) L_k(x)$, où L_k polynôme de Lagrange.
Donc $\|f\|_\infty \leq \left\|f^{(p)}\right\|_\infty + \sum_{k=1}^p C_k \ |f(a_k)|$, où $C_k = \|L_k\|_\infty$.

5) a) On sait qu'il existe C_1 et C_2 indépendants de n tels que $\|f_n\|_\infty \leq \|f_n''\|_\infty + C_1 \ |f_n(0)| + C_1 \ |f_n(1)|$.
Par comparaison, la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge normalement, donc $\sum f_n$ converge.
Et on a par 1), $|f_n'(x)| \leq \|f_n''\|_\infty + \left| \dfrac{f_n(1) - f_n(0)}{1-0} \right| \leq \|f_n''\|_\infty + |f_n(0)| + |f_n(1)|$, donc $\sum f_n'$ converge.
Par le cours, on en déduit que $\sum f_n$ est de classe C^2.

b) σ est une bijection affine de $[0,1]$ sur $[a,b]$. On a σ' constante de valeur $(b-a)$.

Les fonctions g_n sont de classe C^∞ sur $[0,1]$, et on a $\sup_{[0,1]} |g_n| = \sup_{[a,b]} |f_n|$.
D'autre part, on a $g_n'' = (b-a)^2 f_n''$, donc $\sup_{[0,1]} |g_n''| = (b-a)^2 \sup_{[a,b]} |f_n|$.

Il en résulte que les séries $\sum \|g_n''\|_\infty$et $\sum |g_n(0)|$ et $\sum |g_n(1)|$ convergent. Par a), $\sum g_n$ est de classe C^2.

Comme $f_n = g_n \circ \sigma^{-1}$, alors $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\right) \circ \sigma^{-1}$ existe et est aussi de classe C^2.