Interrogation n°20. *Barème sur 25 pts*

Exercice A. Intégrales de Wallis à paramètre continu

1) On considère $\forall x \geq 0,\ F(x) = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^x \ dt$.

a) [1 pt] Montrer que $F(x)$ est bien définie et que $\forall x \geq 0,\ F(x) = \int_0^1 \dfrac{u^x}{\sqrt{1-u^2}}\ du$.

b) [2 pts] Montrer que F est C^∞ sur $[0, +\infty[$, et que $F^{(n)}(0) = \int_0^{\pi/2} (\ln \cos t)^n \ dt = \int_0^1 \dfrac{(\ln u)^n}{\sqrt{1-u^2}} du$.

2) [2.5 pts] On donne $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

En utilisant $u = 1 - \dfrac{t}{x}$, montrer que $F(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\ dt = \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ lorsque $x \to +\infty$.

3) a) [1.5 pt] Montrer que $\forall x \geq 0,\ F(x+2) = \dfrac{x+1}{x+2} F(x)$.

b) [1 pt] Soit $x \geq 0$. Montrer que lorsque $n \to +\infty$, $\prod_{k=1}^n \left(1 - \dfrac{1}{x+2k}\right) \sim \dfrac{1}{2F(x)}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

4) a) [1 pt] Calculer les intégrales $\int_0^1 |\ln u|^n \ du$ et $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\ du$.

b) [1.5 pt] En déduire que $F^{(n)}(0) = O(n!)$ lorsque $n \to +\infty$.

c) [1.5 pt] Montrer que F est DSE en 0.

Exercice B (*début du sujet Centrale MP 2022*)

On note E l'ev des fonctions de classe C^∞ définies sur $[0, 1]$. Pour $g \in E$, on pose $\|g\|_\infty = \sup_{[0,1]} |g|$.

1) [1.5 pt] Soit $a_1 \in [0, 1]$. Montrer qu'il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ (indépendante de f) telle que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + C_1\ |f(a_1)|$$

2) a) [1.5 p] Soient a_1 et $a_2 \in [0, 1]$ distincts. Montrer que

$$\left| f'(x) - \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \right| \leq \|f''\|_\infty$$

b) [1.5 pt] En déduire qu'il existe C_1 et $C_2 \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + C_1\ |f(a_1)| + C_2\ |f(a_2)|$$

3) Soient $p \geq 1$, et p réels distincts $a_1, ..., a_p$ appartenant à $[0, 1]$. Soit $f \in E$.

a) [2 pts] Justifier que l'application $u : \mathbb{R}_{p-1}[X] \to \mathbb{R}^p \quad Q \longmapsto (Q(a_k))_{1 \leq k \leq p}$ est bijective.

En déduire qu'il existe L_1, ... , $L_p \in \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tels que pour $f \in E$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=1}^p f(a_k) L_k(X)$ vérifie

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad P(a_k) = f(a_k)$$

b) [1 pt] Montrer que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ admet au moins $(p-k)$ zéros.

Remarque : On ne demande pas de détailler la preuve de toutes les propriétés utilisées.

c) [1.5 pt] En déduire que pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\left\| f^{(k)} - P^{(k)} \right\|_\infty \leq \left\| f^{(k+1)} - P^{(k+1)} \right\|_\infty$.

4) [2 pts] Soient $p \geq 1$, et p réels distincts $a_1, ..., a_p$ appartenant à $[0, 1]$.

Montrer qu'il existe des réels $C_1, ..., C_p$ tels que

$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_\infty \leq \left\| f^{(p)} \right\|_\infty + \sum_{k=1}^{p} C_k \; |f(a_k)|$$

5) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe C^∞ définies sur $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que

- la série de fonctions $\sum f_n^{(2)}$ converge normalement sur $[a, b]$

- les deux séries $\sum f_n(a)$ et $\sum f_n(b)$ convergent absolument.

a) [1 pt] Dans le cas où $[a, b] = [0, 1]$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ existe et est de classe C^2 sur $[0, 1]$.

b) [1 pt] Traiter le cas général, en considérant $g_n = f_n \circ \sigma$, où $\sigma(t) = a + t(b-a)$.