

Interrogation n°19 bis. Corrigé

Exercice A

1) a) - D'une part, $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe C^1 comme primitive d'une fonction continue.

Donc A est de classe C^1 (comme produit de fonctions C^1), et $A'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- D'autre part, $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est de classe C^1 en x , et $\frac{\partial f}{\partial x}(t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$.

Les fonctions $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ sont bien sûr intégrables sur $[0, 1]$, car continues.

Pour tout $a > 0$, $\forall x \in [0, a]$, on a $\forall t \geq 0$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t) \right| \leq 2a = \varphi(t)$ intégrable sur $[0, 1]$.

Comme $a > 0$ est arbitraire, B est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, et $B'(x) = -2x \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+t^2)} dt$.

- La relation est vraie pour $x = 0$. Pour $x > 0$, avec le changement de variable $s = tx$, on a : $B'(x) = -2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2-s^2} ds = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = -A'(x)$.

b) Par convergence dominée, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = 0$.

En effet, $\forall t \in [0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2(1+t^2)} = 0$ et $\forall x > 0$, $e^{-x^2(1+t^2)} \leq 1 = \varphi(t)$ intégrable sur $[0, 1]$.

Or, par a), $A(x) = A(x) - A(0) = B(0) - B(x)$. Or, $B(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \frac{\pi}{4}$. On en déduit que $G^2 = \frac{\pi}{4}$, et comme $G \geq 0$, alors $G = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice A

1) a) D'une part, $\text{Ker}(A^T) \subset \text{Ker}(AA^T)$. D'autre part, si $X \in \text{Ker}(AA^T)$, alors $\langle X, AA^T X \rangle = \|A^T X\|^2 = 0$.

Donc $\text{Ker}(A^T) = \text{Ker}(AA^T)$, et par le théorème du rang, $\text{rg}(AA^T) = \text{rg}(A^T) = \text{rg}(A) = r$.

b) On a : $Y \in (\text{Im } A)^\perp \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, \langle Y, AX \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, \langle A^T Y, X \rangle = 0 \Leftrightarrow A^T Y = 0$.

On a donc $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$, et de même $(\text{Im } A^T)^\perp = \text{Ker}(A)$, donc $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im}(A^T)$.

2) a) AA^T est symétrique et positive, car $\langle X, AA^T X \rangle = \|A^T X\|^2 \geq 0$.

Par le th spectral, il existe une BON $(V_1, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, AA^T V_i = \lambda_i V_i$.

Quitte à modifier l'ordre, on peut supposer $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = 0$.

En effet, $r = \text{rg}(AA^T)$ est le nombre de valeurs propres non nulles.

D'autre part, $A^T V_i = 0$, car $\text{Ker}(A^T) = \text{Ker}(AA^T)$.

b) (i) On a $\forall (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2, (U_i | U_j) = \frac{1}{\lambda_j} (A^T V_i | A^T V_j) = \frac{1}{\lambda_j} (V_i | AA^T V_j) = \delta_{ij}$.

$(U_1, \dots, U_r)$ est famille orthonormée, et donc libre.

Donc par dimension, $(U_1, \dots, U_r)$ est une BON de $\text{Im } A^T$, c'est-à-dire de $(\text{Ker } A)^\perp$.

(ii) $(V_i | AU_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (V_i | AA_j^T V_j) = \delta_{ij} \sqrt{\lambda_j}$ car $AA_j^T V_j = \lambda_j V_j$.

c) On complète $(U_1, \dots, U_r)$ est une BON de $\mathbb{R}^n$ en la complétant par une BON $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ de $\text{Ker } A$.

On a donc pour $j \in \llbracket r+1, n \rrbracket, (V_i | AU_j) = 0$.

On obtient donc $(V_i | AU_j) = \delta_{ij} \sqrt{\lambda_j}$ si $j \leq r$, et 0 si $j > r$. Donc $V^T A U = D$.

3) a) On a $(A - W) = (VDU^T - W) = V(D - V^T W U)U^T$, donc $\|A - W\|^2 = \|D - V^T W U\|^2$.

Lorsque W décrit $O_n(\mathbb{R})$, $W' = U^{-1}WV^{-1}$ décrit $O_n(\mathbb{R})$.

En effet, l'application $T : O_n(\mathbb{R}) \rightarrow O_n(\mathbb{R}) \quad W \mapsto U^{-1}WV^{-1}$ est bijective, et $\varphi^{-1}(W') = UW'V$.

On en déduit que $\inf_{W \in O_n(\mathbb{R})} \|A - W\|^2 = \inf_{W' \in O_n(\mathbb{R})} \|D - W'\|^2$, c'est-à-dire $\Delta(A) = \Delta(D)$.

b) $\|D - W\|^2 = \|D\|^2 - 2\langle D, W \rangle + \|W\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2\langle D, W \rangle + n$.

D'où $\delta(D) = n + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + 2 \inf_{W \in O_n(\mathbb{R})} (-\langle D, W \rangle)$, et on conclut avec $\inf(-E) = -\sup E$.

c) Posons $W = (w_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in O_n(\mathbb{R})$. On a $\langle D, W \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_{ii}$.

Comme $|w_{ii}| \leq 1$, alors $\langle D, W \rangle \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$.

Et il y a égalité pour $W = \text{Diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in O_n(\mathbb{R})$, avec $\begin{cases} \varepsilon_i = 1 & \text{si } \lambda_i \geq 0 \\ \varepsilon_i = -1 & \text{si } \lambda_i < 0 \end{cases}$

Donc $\sup_{W \in O_n(\mathbb{R})} \langle D, W \rangle = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$. Par a) et b), $\delta(A) = n + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n (|\lambda_i| - 1)^2$.

4) (i) On sait que $\text{rg}(MN) \leq \min(\text{rg } M, \text{rg } N)$ qui résulte de $\text{Im}(MN) \subset \text{Im } N$ et $\text{Ker}(MN) \supset \text{Ker } N$.

Comme $ABA = A$, alors $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(AB)$ et $\text{rg}(A) \leq \text{rg}(BA)$.

De même, comme $BAB = B$, alors $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(AB)$ et $\text{rg}(B) \leq \text{rg}(BA)$.

Les inégalités réciproques sont immédiates.

(ii) On a $(AB)^2 = (ABA)B = AB$, et $\text{Im}(AB) \subset \text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(AB) \supset \text{Ker } B$.

Par (i), on en déduit par dimension que AB est la projection sur $\text{Im } A$ parallèlement à $\text{Ker } B$.

(iii) Preuve analogue à (ii) en inversant les rôles de A et B (qui jouent un rôle symétrique).

5) a) Si il existe x tel que $Ax = y$, alors $ABAx = Ax$, c'est-à-dire $ABx = y$.

Réciproquement, si $ABx = y$, alors $x = BY$ vérifie bien $Ax = y$.

b) [1 pt] $Ax = y$ est une équation linéaire dont $x_0 = BY$ est une solution.

Donc l'ensemble des solutions est $x_0 + \text{Ker } A$. Il reste donc à montrer que $\text{Ker } A = \text{Im}(I_n - BA)$.

Comme BA est la projection sur $\text{Im } B$ parallèlement à $\text{Ker } A$, alors $\text{Im}(I_n - BA) = \text{Ker } A$.

6) (i) AB est symétrique, donc les sev propres sont orthogonaux : AB est une projection orthogonale.

Donc par 4) (ii), $\text{Im } A$ et $\text{Ker } B$ sont supplémentaires orthogonaux. De même pour (ii) avec BA et 4) (iii).

b) On a $V^{-1}AU = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ qui s'interprète comme un changement de bases.

Donc V est une BON adaptée à $\text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp$ et U est une BON adaptée à $(\text{Ker } A)^\perp \oplus \text{Ker } A$.

Or, $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker } B$ et $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im } B$.

Donc $U^{-1}BV$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$, avec $M \in GL_r(\mathbb{R})$.

De plus, on a $(V^{-1}AU)(U^{-1}BV)(V^{-1}AU) = (V^{-1}AU)$, car $ABA = A$.

On pose $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in GL_r(\mathbb{R})$. On a donc $DMD = D$, donc $M = D^{-1}$.

Remarque : B est appelé LE pseudo-inverse de A .

C'est l'unique matrice telle que $ABA = A$, $BAB = B$, $(AB)^T = AB$ et $(BA)^T = BA$.