

Exercice A. Calcul de l'intégrale de Gauss à l'aide d'une intégrale paramétrée (5.5 pts)

1) [3.5 pts] On pose $\forall x \geq 0$,

$$A(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \quad \text{et} \quad B(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

Montrer que A et B sont de classe C^1 , et que $\forall x \geq 0$, $A'(x) = -B'(x)$.

Indication : On pourra notamment faire intervenir le changement de variable $s = tx$.

2) [2 pts] On pose $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$. En utilisant 1), montrer que $G = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice B (15.5 pts) Les parties I et II sont indépendantes

Partie I. Décomposition en valeurs singulières

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique $\| \cdot \|$ associé au produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $r = \text{rg } A$.

1) a) [1 pt] En utilisant $\langle X; AA^T X \rangle$, montrer que $\text{Ker}(A^T) = \text{Ker}(AA^T)$. En déduire $\text{rg}(AA^T) = r$.

b) [1 pt] Montrer que $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker}(A^T)$ et $(\text{Ker } A)^\perp = \text{Im}(A^T)$.

2) a) [1.5 pt] Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ et une BON $(V_1, \dots, V_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad AA^T V_i = \lambda_i V_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket r+1, n \rrbracket, \quad A^T V_i = 0$$

b) [2 pts] On pose $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \quad U_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} A^T V_j$. Montrer les deux propriétés suivantes :

(i) La famille $(U_1, \dots, U_r)$ est une base orthonormée de $(\text{Ker } A)^\perp$

(ii) Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$, $(V_i | AU_j) = \delta_{ij} \sqrt{\lambda_j}$.

c) [1.5 pt] *Décomposition en valeurs singulières*

Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et $V \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$V^T A U = D, \quad \text{où } D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \dots, 0)$$

Indication : Interpréter les coefficients de $V^T A U$ en termes de produits scalaires.

3) On note $\| \cdot \|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\|A\|^2 = \text{tr}(A^T A) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.

On vérifie aisément (*admis ici*) que pour toutes matrices orthogonales U et $V \in O_n(\mathbb{R})$, $\|VAU\| = \|A\|$.

On pose $\delta(A) = d(A, O_n(\mathbb{R}))^2 = \inf_{W \in O_n(\mathbb{R})} \|A - W\|^2$.

Par 2), il existe U et $V \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $V^T A U = D$.

a) [1 pt] Montrer que $\delta(A) = \delta(D)$, où $V^T A U = D$ est définie au 2) c).

b) [1 pt] On pose $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Montrer que $\delta(D) = n + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 - 2 \sup_{W \in O_n(\mathbb{R})} \langle D, W \rangle$.

c) [1.5 pt] Calculer $\sup_{W \in O_n(\mathbb{R})} \langle D, W \rangle$. En déduire $\delta(A) = \sum_{i=1}^n (|\lambda_i| - 1)^2$.

Partie II. Pseudo-inverse d'une matrice

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$ABA = A \quad \text{et} \quad BAB = B$$

4) [1.5 pt] Montrer les propriétés suivantes :

- (i) $\text{rg } AB = \text{rg } A = \text{rg } B = \text{rg } BA$
- (ii) AB est la projection sur $\text{Im } A$ parallèlement à $\text{Ker } B$
- (iii) BA est la projection sur $\text{Im } B$ parallèlement à $\text{Ker } A$.

5) *Cette question est indépendante de la suivante*

Soit $y \in K^n$.

a) [1 pt] Montrer : il existe $x \in K^n$ tel que $Ax = y$ si et seulement si $ABy = y$.

b) [1 pt] On suppose $ABy = y$.

Montrer que les solutions de l'équation $Ax = y$ sont les $x = By + (I_n - BA)w$, où $w \in K^n$.

6) On suppose de plus que AB et BA sont des matrices réelles symétriques.

a) [0.5 pt] Montrer les propriétés suivantes :

- (i) $\text{Im } A$ et $\text{Ker } B$ sont supplémentaires orthogonaux
- (ii) $\text{Ker } A$ et $\text{Im } B$ sont supplémentaires orthogonaux.

b) [1 pt] Il existe (cf partie I) des matrices orthogonales $U \in O_p(\mathbb{R})$ et $V \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$V^T AU = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$$

Montrer que $U^T BV = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, 0, \dots, 0)$, où $\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}$.