Interrogation n°19. Corrigé

Exercice A

1) La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ décroît donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\ln n}$ de même nature que $\int_e^{+\infty} \dfrac{dt}{t\ln t} = [\ln\ln t]_e^{+\infty} = +\infty$.

2) On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\dfrac{n+2}{2n+2} = \dfrac{1}{2}$, donc par d'Alembert, la série converge.

Autre méthode : On a en fait $a_n = (\ln n)\times \dfrac{n+1}{2^n}$, donc $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

3) On a $(-1)^n a_n = n^\alpha\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = (-1)^n n^\alpha\left(\dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{\alpha(-1)^n}{n^{1-\alpha}} + \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$.

On a $2-\alpha > 1$, donc $\sum \varepsilon_n$ est absolument convergente.

On a $1-\alpha > 0$, donc $\left(\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît vers 0,et ainsi $\sum \dfrac{\alpha(-1)^n}{n^{1-\alpha}}$ converge (par le CSSA).

Donc $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ converge comme somme de deux séries convergentes.

Autre méthode : $f : t \longmapsto (t+1)^\alpha - t^\alpha$ décroît sur $]0,+\infty[$, car $f'(t) = \alpha\left(\dfrac{1}{(t+1)^{1-\alpha}} - \dfrac{1}{t^{1-\alpha}}\right) < 0$.

Or, on a $a_n = f(n)$. Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

D'autre part, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 (car $\alpha < 1$). Par le CSSA, $\sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ converge.

4) On a $(a_{n+1}-a_n)b_n = O(|a_{n+1}-a_n|)$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante positive, alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

De plus, $|a_{n+1}-a_n| = a_n - a_{n+1}$. Donc $\sum |a_{n+1}-a_n|$ converge. Par comparaison, $\sum(a_{n+1}-a_n)b_n$ converge.

Exercice B

1) $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1} \sim_0 t^{x-2}$ intégrable sur $]0,1]$ car $x-2 > -1$ et $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable sur $[1,+\infty[$.

Donc $J(x)$ existe pour tout $x > 1$.

2) Posons $f(t,x) = \dfrac{t^{x-1}}{e^t-1}$. On a :

- Pour tout $t > 0$, $x \longmapsto f(t,x)$ est de classe C^∞ et $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x) = \dfrac{(\ln t)^n t^{x-1}}{e^t-1}$.
- Pour tout $x > 0$, les $t \longmapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x)$ sont continues (par morceaux) sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, pour tout $x\in[a,b]\subset]1,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(t,x)\right| \leq \varphi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{|\ln t|^n\ t^{a-1}}{e^t-1} & \text{si } t\in]0,1] \\ \dfrac{|\ln t|^n\ t^{b-1}}{e^t-1} & \text{si } t\geq 1 \end{cases}$

On choisit c de sorte que $-1 < c < a-2$.

On a $\varphi_n(t) = O(t^c)$ en $t=0$ et $\varphi_n(t) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc φ_n est intégrable.

Donc J est de classe C^∞.

3) On a $\forall t > 0$, $\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1} = e^{-t}\dfrac{t^{x-1}}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^{x-1}e^{-nt}$.

On a $\int_0^{+\infty}\left|t^{x-1}e^{-nt}\right|\ dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\ e^{-nt}\ dt = \dfrac{1}{n^x}\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-u}\ du = \dfrac{\Gamma(x)}{n^x}$.

La série $\sum \dfrac{\Gamma(x)}{n^x}$ converge car $x > 1$. Par le th ITT, on a donc $J(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\Gamma(x)}{n^{x+1}} = \Gamma(x)\zeta(x)$.

Exercice C

1) a) *Hypothèse de domination* : il existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et un entier p_0 tels que

$$\forall p \geq p_0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}, \ |a_{n,p}| \leq \alpha_n \qquad \text{et} \qquad \sum \alpha_n \text{ converge}$$

b) *Hypothèse de convergence normale* : $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{p\in\mathbb{N}} |a_{n,p}| < +\infty$.

On peut se limiter aux valeurs de p assez grandes : pour $p \geq p_0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{p\geq p_0} |a_{n,p}| < +\infty$.

c) Les conditions du a) et du b) sont équivalentes, car on peut se ramener au cas où $\alpha_n = \sup_{p\geq p_0} |a_{n,p}|$.

2) a) Par l'inégalité de la moyenne, on a $|a_n| \leq \dfrac{M_r(f)}{r^n}$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$. On note C_r le cercle de centre 0 et de rayon r. En particulier, C_r est un compact.

Par hypothèse, la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur C_r vers f.

Posons $\varphi_k(t) = f_k(re^{it})\ e^{-int}$ et $\varphi(t) = f(re^{it})\ e^{-int}$. Les φ_k sont continues (cv normale d'une série de fonctions continues) et $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[0, 2\pi]$.

Donc φ est continue et $\lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} \varphi_k(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\ dt$.

Donc $\lim_{k\to+\infty} a_n^{(k)} = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\ e^{-int}\ dt$. On pose donc $a_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\ e^{-int}\ dt$.

Remarque : On peut aussi utiliser le th de cv dominée : $|\varphi_k(t)| \leq \psi(t) = 1 + |\varphi(t)|$ pour k assez grand.

c) On fixe $z \in \mathbb{C}$. On choisit $r > |z|$. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\omega_k(n) = a_n^{(k)} z^n$ et $\omega(n) = a_n z^n$.

On a $f_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_k(n)$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega(n)$. Par b), on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to+\infty} \omega_k(n) = \omega(n)$.

De plus, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $|\omega_k(n)| \leq \left(\dfrac{|z|}{r}\right)^n M_r(f_k)$.

Comme $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur C_r, alors $\lim_{k\to+\infty} M_r(f_k) = M_r(f)$.

Doonc $(M_r(f_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée par un réel m. D'où $\forall k \in \mathbb{N}$, $|\omega_k(n)| \leq m \left(\dfrac{|z|}{r}\right)^n$.

Comme $\sum_{n\in\mathbb{N}} m \left(\dfrac{|z|}{r}\right)^n$ converge, alors par cv dominée (cf 1)), $\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_k(n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega(n)$.

D'où $f(z) = \lim_{k\to+\infty} f_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, et ainsi f est DSE sur $\mathbb{C}$.

Exercice B

1) On a $\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^p$, $(VX \mid Y) = \left(X \mid V^T Y\right)$.

Supposons $Y \in \mathrm{Ker}(V^T)$. On a donc $\forall X \in \mathbb{R}^p$, $(VX \mid Y) = 0$, donc $Y \in (\mathrm{Im}\, V)^\perp$. Ainsi, $(\mathrm{Im}\, V)^\perp \subset \mathrm{Ker}(V^T)$.

Or, par le th du rang, $\dim \mathrm{Ker}(V^T) = p - \mathrm{rg}(V^T) = p - \mathrm{rg}(V) = \dim((\mathrm{Im}\, V)^\perp)$.

Par inclusion et par égalité des dimensions, on a donc $(\mathrm{Im}\, V)^\perp = \mathrm{Ker}(V^T)$.

2) On a $\mathrm{rg}(VV^T) = \mathrm{rg}(I_q) = q$, donc $\mathrm{rg}\, V \geq q$, et ainsi $p \geq q$.

On sait que $(\mathrm{Im}\, V) \oplus^\perp (\mathrm{Im}\, V)^T = \mathbb{R}^q$.

Si $Y = VX \in \mathrm{Im}\, V$, on a $PY = V(V^T X) = 0$, car $\mathrm{Ker}(V^T) = (\mathrm{Im}\, V)^\perp$. Si $Y \in (\mathrm{Im}\, V)^\perp$, alors $V(V^T X) = 0$.

Donc $P = VV^T$ est la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} V$.

Autre preuve (conseillée) **:** Comme $VV^T = I_p$, alors $(V_1, ..., V_q)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} V$.

Donc $\forall X \in \mathbb{R}^q$, $PX = \sum_{j=1}^q V_j V_j^T X = \sum_{j=1}^q (V_j \mid X) V_j$ projeté orthogonal de X sur $\operatorname{Im} V$.

3) Soit $\left(\dfrac{X}{Y}\right) \in \operatorname{Ker} M$, c'est-à-dire $\begin{cases} VX + Y = 0 \\ W^T Y = 0 \end{cases}$.

On a alors $W^T(-VX) = 0$, donc $X = 0$ (car $W^T V$ inversible). Donc $Y = -WV = 0$.

On en déduit que $\operatorname{Ker} M = \{0\}$, et comme M est une matrice carrée, M est inversible.

4) On a $W^T V \in GL_q(K)$, donc $\operatorname{Ker}\left(W^T V\right) = \{0\}$, et ainsi $\operatorname{Im} V \cap \operatorname{Ker}(W^T) = \{0\}$.

On a aussi $\operatorname{rg}(W^T) \geq \operatorname{rg}(W^T V) = q$. Comme $\operatorname{rg}(W^T) \leq \min(p, q)$, alors $\operatorname{rg}(W^T) = q$.

Donc $\dim \operatorname{Ker}(W^T) = p - q$ par le th du rang. Par dimension $\operatorname{Im} V \oplus \operatorname{Ker}(W^T) = \mathbb{R}^p$.

5) Soit $Z = VX + Y \in \operatorname{Im} V \oplus \operatorname{Ker}(W^T) = \mathbb{R}^p$. On a $PZ = \left(\begin{array}{c|c} V & O_p \end{array} \right) M^{-1} \left(\dfrac{VX + Y}{O_q}\right)$.

Posons $\left(\dfrac{X'}{Y'}\right) = M^{-1}\left(\dfrac{AX + Y}{O_q}\right)$. On a donc $\begin{cases} VX' + Y' = VX + Y \\ W^T Y' = 0 = W^T Y \end{cases}$

On obtient donc $\begin{cases} V(X' - X) = -(Y' - Y) \\ W^T(Y' - Y) = 0 \end{cases}$, donc $Y' - Y = 0$ et $X' - X = 0 \quad$ (cf 3)).

Ainsi, $M^{-1}\left(\dfrac{VX + Y}{O_q}\right) = \left(\dfrac{X}{Y}\right)$, et $PZ = VX$.

Donc P est la projection sur $(\operatorname{Im} V)$ parallèlement à $(\operatorname{Im} W)^\perp$.

Exercice E

1) Δ est non vide car $\lim_{t \to -\infty} P(X \geq t) = 1 \quad$ (par continuité croissante).

Δ est majoré car $\lim_{t \to +\infty} P(X \geq t) = 0 \quad$ (par continuité croissante). Il existe donc $m = \sup \Delta$.

- On a $m = \lim_{n \to +\infty} t_n$, avec $t_n \in \Delta$ et on peut choisir $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante.

Donc par continuité décroissante, $P(X \geq m) = \lim_{n \to +\infty} P(X \geq t_n) \geq \dfrac{1}{2}$.

- Pour $t > m$, on a $P(X \geq t) < \dfrac{1}{2}$, donc par continuité décroissante $P(X \leq m) = \lim_{n \to +\infty} P\left(X < m + \dfrac{1}{n}\right) \geq \dfrac{1}{2}$.

2) Si $m \geq \mu$, $(X \geq m)$ implique $(|X - \mu| \geq |m - \mu|)$, donc $P\left(|X - \mu| \geq |m - \mu|\right) \geq P(X \geq m)$.

Si $m \leq \mu$, $(X \leq m)$ implique $(|X - \mu| \geq |m - \mu|)$, donc $P\left(|X - \mu| \geq |m - \mu|\right) \geq P(X \leq m)$.

Dans tous les cas, on a donc $P\left(|X - \mu| \geq |m - \mu|\right) \geq \dfrac{1}{2}$.

Or, par l'inégalité de Bienaymé-Tchevychev, on a $P(|X - \mu| \geq |m - \mu|) \leq \dfrac{V(X)}{(m - \mu)^2}$.

Donc $V(X) \geq \dfrac{1}{2}(m - \mu)^2$, c'est-à-dire $|m - \mu| \leq \sqrt{2}\sigma(X)$.