Interrogation n°18 bis. Corrigé

Exercice A

1) Comme $\binom{n}{k} \geq 1$, alors $k!(n-l)! \leq n!$ d'où le résultat en composant par $t \longmapsto t^s$ croissante sur $\mathbb{R}^+$.

2) a) La fonction nulle appartient à $G_s(T)$.

Soient f et $g \in G_s(T)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a $f+g$ de classe C^∞. Il existe M, N, R et $S > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0,T], \left|f^{(n)}(t)\right| \leq \frac{M(n!)^s}{R^n} \text{ et } \left|g^{(n)}(t)\right| \leq \frac{N(n!)^s}{S^n}$$

Posons $m = \max(M,N)$ et $r = \min(R,S)$. Posons $F(t) = \lambda f(t) + \mu g(t)$. On a $\left|F^{(n)}(t)\right| \leq \dfrac{m(|\lambda|+|\mu|)(n!)^s}{r^n}$.

b) Posons $F(t) = f(t)g(t)$. On a fg de classe C^∞, et par Leibniz :

$\left|F^{(n)}(t)\right| \leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left|f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)\right| \leq MN \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \dfrac{(k!)^s}{r^k} \dfrac{((n-k)!)^s}{r^{n-k}} = \dfrac{MN}{r^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (k!(n-k)!)^s$.

Par 1), $\left|F^{(n)}(t)\right| \leq \dfrac{MN}{r^n} 2^n (n!)^s = \dfrac{MN}{(r/2)^n}(n!)^s$. D'où $F \in G_s(T)$.

Variante : $\left|F^{(n)}(t)\right| \leq MN(n!)^s \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \dfrac{1}{R^k} \dfrac{1}{S^{n-k}} = \dfrac{MN(n!)^s}{T^n}$, où $\dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{S}$.

3) a) Soit $(t,x) \in [0,T] \times [0,+\infty[$ Posons $a_n = \dfrac{f^{(n)}(t) x^{2n}}{(2n)!}$. On a $|a_n| \leq \dfrac{M(n!)^s x^{2n}}{R^n (2n)!} = |b_n|$.

Pour $x \neq 0$, on a $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \sim \dfrac{n^s x^2}{4Rn^2} \to 0$, donc par d'Alembert, la série $\sum b_n$ converge.

Par comparaison, $\sum a_n$ converge absolument, d'où l'existence de $H(t,x)$.

Remarque : Ainsi, à t fixé, le rayon de convergence de la série entière (en x) vaut $+\infty$.

b) Posons $F_n(x,t) = f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

- On fixe $x \in \mathbb{R}$. On a $\dfrac{\partial F_n}{\partial t}(x,t) = f^{(n+1)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

La série $t \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} \dfrac{\partial F_n}{\partial t}(x,t)$ converge normalement sur $[0,T]$:

En effet, $c_n = \sup_{t \in [0,T]} \left| \dfrac{\partial F_n}{\partial t}(x,t) \right| \leq \dfrac{M((n+1)!)^s x^{2n}}{R^n (2n)!}$ et comme au a), la série $\sum c_n$ converge.

Donc $\dfrac{\partial H}{\partial t}$ existe et on a $H(t,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\partial F_n}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n+1)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.

- On fixe $t \in \mathbb{R}$. On a aussi $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ et $\dfrac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}(x,t) = f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$.

Par a), les séries $x \longmapsto \sum \dfrac{\partial F_n}{\partial x}(x,t)$ et $x \longmapsto \sum \dfrac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}(x,t)$ convergent pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De plus, la série $x \longmapsto \sum \dfrac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}(x,t)$ converge normalement sur tout segment $[-\rho, \rho]$.

En effet, $c_n = \sup_{x \in [-\rho,\rho]} \left| \dfrac{\partial^2 F_n}{\partial x^2}(x,t) \right| \leq \dfrac{M n^s \rho^{2n-2}}{R^n (2n-2)!}$ et comme au a), la série $\sum c_n$ converge.

Donc $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ existe et on a $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(t) \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n+1)}(t) \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$.

Autre argument pour $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}$:

L'application en x est par a) une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$.

Elle est donc par le cours de classe C^∞, et on peut dérivéer $x \longmapsto H(t,x)$ terme à terme.

c) Pour prouver la continuité de H, on utilise la caractérisation séquentielle :

Supposons $\lim_{k \to +\infty} (t_k, x_k) = (t,x)$ dans $[0,T] \times \mathbb{R}$.

Posons $A_n(k) = F_n(t_k, x_k)$. On a $\lim_{k \to +\infty} A_n(k) = F_n(t,x)$.

La suite $(|x_k|)_{k \in \mathbb{N}}$ est majorée par un réel ρ.

On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $|A_n(k)| \leq a_n = \dfrac{M(n!)^s \rho^{2n}}{R^n(2n)!}$ et par a), la série $\sum a_n$ converge.

Par le th de la double limite (ici pour une série de fonctions de la variable entière k), on a :

$\lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} A_n(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{k\to+\infty} A_n(k)$. Donc $\lim_{n\to+\infty} H(t_k, x_k) = H(t, x)$.

Exercice B

1.a) Soient P et $Q \in A_n$. Soit $R \in [P, Q]$. Il existe donc $\lambda \in [0, 1]$ tel que $R = \lambda P + (1 - \lambda)Q$.

Alors $R(1) = \lambda + (1 - \lambda) = 1$ et de même $R(-1) = 1$.

Et pour tout $x \in [-1, 1]$, $R(x) = \lambda P(x) + (1 - \lambda)Q(x) \geq 0$, car λ et $1 - \lambda$ sont positifs.

On en déduit que le segment $[P, Q]$ est inclus dans A_n. Donc A_n est une partie convexe de E_n.

1.b) Vérifions que $P \longmapsto \|P\|_1$ est une norme sur E_n.

- $\|P\|_1 \geq 0$.
- Supposons $\|P\|_1 = 0$.Comme $t \longmapsto |P(t)|$ continue positive, alors $\forall t \in [-1, 1]$, $|P(t)| = 0$.

Donc P s'annule sur $[-1, 1]$, qui est infini, donc $P = 0$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda P\|_1 = |\lambda| \|P\|_1$.
- $\|P + Q\|_1 = \int_{-1}^{+1} |P(t) + Q(t)| \ dt \leq \int_{-1}^{+1} |P(t)| + |Q(t)| \ dt = \|P\|_1 + \|Q\|_1$.

Donc $P \longmapsto \|P\|_1$ est une norme sur E_n.

1.c) *Remarque* : Il ne faut chercher à utiliser la norme $\| \ \|_1$, car il faut impérativement exploiter la dimension finie (en effet, la propriété serait fausse dans $\mathbb{R}[X]$ muni de cette norme $\| \ \|_1$).

On munit E_n de la norme de la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$.

Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A_n convergeant vers P pour la norme $\| \ \|_\infty$.

La convergence uniforme implique la convergence simple.

Ainsi, pour tout $t \in [-1, 1]$, $P(t) = \lim_{n\to+\infty} P_k(t)$, donc $P(1) = P(-1) = 1$ et $P(t) \geq 0$.

Donc A_n est une partie fermée de E_n pour $\| \ \|_\infty$, donc pour $\| \ \|_1$, puis que les normes sont équivalentes en dimension finie.

Variante : On considère, pour $x \in [0, 1]$, l'application $\phi_x : E_n \to \mathbb{R} \quad P \longmapsto P(x)$.

L'application ϕ_x est continue.

Et on a : $P \in A_n$ ssi $\phi_1(P) = 1$, $\phi_{-1}(P) = 1$ et $\forall x \in [0, 1]$, $\phi_x(P) \geq 0$.

Ainsi, A_n est définie par des inégalités larges associées à des fonctions continues, donc ces inégalités sont stables par passage à la limite (pour toute norme), donc A_n est fermée.

2.a) K_n n'est pas vide, car le polynôme $1 \in K_n$.

Il existe donc $m_n = \inf\{\phi(P),\ P \in K_n\}$. On a nécessairement $m_n \leq 2$.

$$\begin{cases} \text{Pour } P \in K_n,\ \|P\|_1 \geq m_n \\ \text{Pour } P \in A_n \setminus K_n,\ \|P\|_1 \geq 2 \geq m_n \end{cases}, \text{ donc } \mu_n \geq m_n.$$

Comme $K_n \subset A_n$, alors on a aussi $\mu_n \leq m_n$. Donc on a bien $\mu_n = m_n$.

2.b) K_n est l'intersection de A_n et de la boule de centre 0 et de rayon 2 pour la norme $\| \ \|_1$.

K_n est fermée (comme intersection de deux fermés) et borné.

Pour $P \in A_n$, on a $|\phi(P)| \leq \int_{-1}^{+1} |P(t)| \ dt = \|P\|_1$.

Par linéarité, $\phi : E_n \to \mathbb{R}$ est donc 1-lipschitzienne, et a fortiori continue.

Donc ϕ est bornée et atteint ses bornes sur K_n. Il existe donc $P \in K_n \subset A_n$ tel que $\phi(P) = \mu_n$.

2.c) Soient P et $Q \in B_n$ et $\lambda \in [0, 1]$. On sait déjà par 1.a) que $\lambda P + (1 - \lambda)Q \in A_n$.

Par linéarité, $\phi(\lambda P + (1 - \lambda)Q) = \lambda\phi(P) + (1 - \lambda)\phi(Q) = \lambda\mu_n + (1 - \lambda)\mu_n = \mu_n$. Donc B_n est convexe.

2.d) Il existe $P \in B_n$. On considère le polynôme $Q(X) = P(-X)$.

Comme $P \in A_n$, on vérifie aisément que $Q \in A_n$.

De plus, $|\phi(P)| = \int_{-1}^{+1} |P(t)| \ dt = \int_{-1}^{+1} |P(-u)| \ du = \int_{-1}^{+1} |Q(u)| \ du = |\phi(Q)|$.

Donc $Q \in B_n$. Comme B_n est convexe, alors $\frac{1}{2}(P + Q) \in B_n$.

Ainsi, le polynôme pair $\frac{1}{2}(P(X) + P(-X))$ appartient à B_n.