Interrogation n°18. Corrigé

1) *Remarque* : L'application $(u,v) \longmapsto (x,y) = (u, uv)$ est une bijection de U sur U.

a) On a $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(u,uv) + v\dfrac{\partial f}{\partial y}(u,uv) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ où $(x,y) = (u,uv)$.

Donc $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\alpha}{u}g(u,v)$.

b) En fixant v, on est ramené à une équation différentielle de la forme $G'(u) = \dfrac{\alpha}{u}G(u)$, donc $G(r) = ku^\alpha$.

Comme la constante dépend de v, on obtient $g(u,v) = K(v)u^\alpha$.

c) Pour $(x,y) \in U$, on a $(u,v) = \left(x, \dfrac{y}{x}\right) \in U$. Donc $f(x,y)$ est de la forme $K\left(\dfrac{y}{x}\right)x^\alpha$.

Et $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1, car $K(y) = f(1,y)$.

2) a) Les solutions de l'équation homogène sont les $K\exp(-u)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière polynômiale $y_0(u) = \alpha u + \beta$ de même degré 1.

On obtient $y_0(u) = au + c - a$. Donc les solutions sont les $y(u) = au + c - a + K\exp(-u)$, avec $K \in \mathbb{R}$.

b) On fixe v, et on applique a) avec $c = bv$.

Donc les solutions sont les $g(u,v) = au + bv - a + K(v)\exp(-u)$, avec $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1.

c) On pose $g(u,v) = f(u, u+v)$. On a donc $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(u, u+v)$.

Comme $(u,v) \longmapsto (x,y) = (u, u+v)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, alors f vérifie (E) ssi g vérifie

$$\frac{\partial g}{\partial u} + g = 2u + v$$

Par b), on obtient $g(u,v) = 2u + v - 2 + K(v)\exp(-u)$, avec K de classe C^1.

Donc les solutions de (E) sont les $f(x,y) = x + y - 2 + K(y-x)\exp(-x)$, avec K de classe C^1.

3) On a $f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$.

Pour $(x,y) \in U$, on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ ssi $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ ssi $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

a) On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2y$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2x$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 - 2(x+y)$.

Donc $H_f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres $\dfrac{-1}{3}(2 \pm 1)$, c'est-à-dire -1 et $-\dfrac{1}{3}$.

Ainsi, $H_f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) \in S_2^{--}(\mathbb{R})$ définie négative, et donc f admet en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ un maximum local strict.

b) f est continue sur A compact, donc f est bornée et atteint ses bornes.

f est identiquement nulle sur le bord de A.

Si f admet un extremum global (donc local) en $(a,b) \in U$, (a,b) est nécessairement le point critique.

Or $f\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$. On en conclut $\inf f = 0$ et $\sup f = \dfrac{1}{27}$.

c) En fait, $\sup f = \sup_{(x,y,z)\in\Delta} xyz$, où $\Delta = \{(x,y,z) \in]0,+\infty[^2 \mid x+y+z = 1\}$.

Par l'inégalité arithmético-géoémtrique (qui résulte de la concavité de ln), on a $xyz \leq \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$,

avec égalité lorsque $x = y = z$, c'est-à-dire $(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$.

4) a) $f'(t) = \frac{1}{2}(X' \mid SX) + \frac{1}{2}(X \mid SX') + (X'' \mid X') = (X' \mid SX) + (X'' \mid X')$ car S symétrique.

Comme $X'' = -SX$, alors $f'(t) = 0$, donc f est constante.

b) On pose $X(t)=\sum_{k=1}^n y_k(t)Z_k$, et les y_k sont bien de classe C^∞, car $Y(t)=P^{-1}X(t)$.

On a $X''(t)=\sum_{k=1}^n y_k''(t)Z_k$. D'où on obtient (E) : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $y_k''(t)=-\lambda_k y_k(t)$.

On en déduit que les solutions de (E) sont les

$$X(t)=\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t)\ Z_k,\ \text{avec } (A_1,...,A_n,B_1,...,B_n)\in\mathbb{R}^{2n}$$

c) (E) correspond au système d'ordre 1 de dimension $2n$: $\begin{pmatrix} X\\ Z\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} Z\\ -SX\end{pmatrix}$.

Ainsi, toute solution est entièrement déterminée par $(X(0),X'(0))\in\mathbb{R}^{2n}$.

D'où un isomorphisme $X\longmapsto(X(0),X'(0))$ du sev Δ des solutions sur $\mathbb{R}^{2n}$.

5) Soit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers (x,y). Posons $g_n(t)=f(t,x_n,y_n)$ et $g(t)=f(t,x,y)$ fonctions continues.

Il s'agit de prouver que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\ dt=\int_0^1 g(t)\ dt$. On utilise le th de convergence dominée.

La suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe $\rho\in\mathbb{R}^+$, tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(x_n,y_n)\in[-\rho,\rho]^2$.

Ainsi, pour tout $t\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $(t,x_n,y_n)\in K=[0,1]\times[-\rho,\rho]^2$ compact de $\mathbb{R}^3$.

On a donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall t\in[0,1]$, $|g_n(t)|\le M=\varphi(t)$, où $M=\sup_K|f|$.

Par convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)\ dt=\int_0^1 g(t)\ dt$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}J(x_n,y_n)=J(x,y)$.

6) Sous des hypothèses raisonnables, on a

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n'(t)x^n \text{ et } x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)+x\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)c_n(t)x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}nc_n(t)x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}n^2c_n(t)x^n$$

D'où l'idée de prendre $c_n'(t)=-n^2c_n(t)$ et $c_n(0)=1$, c'est-à-dire $c_n(t)=\exp(-n^2t)$.

On prend donc $\boxed{f(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(t,x),\text{ avec } g_n(t,x)=c_n(t)x^n=\exp(-n^2t)x^n}$.

On a bien $\sum g_n(t,x)$ converge pour tout $(t,x)\in[0,+\infty[\times[0,1[$, car $|c_n(t)x^n|\le x^n$.

- Avec $t\ge0$ fixé, $x\longmapsto f(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}g_n(t,x)$ est une série entière de rayon $R\ge1$, car $c_n(t)\le1$.

Donc on a bien $x\longmapsto f(t,x)$ de classe C^∞, et $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)+x\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n^2c_n(t)x^n$.

- Avec $x\in[0,1[$ fixé, $t\longmapsto\dfrac{\partial g_n}{\partial t}(t,x)=-n^2c_n(t)=-n^2\exp(-n^2t)x^n$, donc $\sup_{t\ge0}\left|\dfrac{\partial g_n}{\partial t}(x,t)\right|=n^2x^n$.

Donc $t\longmapsto\sum\dfrac{\partial g_n}{\partial t}(x,t)$ converge normalement. sur $[0,+\infty[$.

On en déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)=-\sum_{n=0}^{+\infty}n^2c_n(t)x^n$. On obtient bien (E).

7) On considère F le sev des fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et E_λ l'ensemble des $f\in F$ telles que

$$f(x)-\lambda\int_0^x f(t)\ dt=e^x$$

a) Soit $f\in E_\lambda$. Alors f est de classe C^1, car $f(x)=e^x+\lambda\int_0^x f(t)\ dt$.

En dérivant, on obtient $f'(x)=e^x+\lambda f(x)$.

b) Une fonction est nulle ssi elle vaut 0 en un point (0 par exemple) et si sa dérivée est nulle.

Donc $\boxed{f\in E_\lambda\text{ ssi } f(0)=1\text{ et } f'(x)=e^x+\lambda f(x)}$.

c) Si $\lambda\ne1$, les solutions de l'équation différentielle sont $f(x)=\dfrac{1}{1-\lambda}e^x+Ke^{\lambda x}$.

Donc l'unique $f\in E_\lambda$ est $f(x)=\dfrac{1}{1-\lambda}e^x-\dfrac{\lambda}{1-\lambda}e^{\lambda x}$.

Si $\lambda=1$, il y a résonance, et une solution particulière de l'équation différentielle est xe^x.

Donc l'unique $f\in E_1$ est $f(x)=(x+1)e^x$.