Interrogation n°18. *Barème sur 22 pts*

1) On pose $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}\ \ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^1 vérifiant (E) : $\boxed{x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y)}$.

a) [1 pt] On pose $\forall (u,v) \in U,\ g(u,v) = f(u, uv)$. Montrer que $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\alpha}{u} g(u,v)$.

b) [1 pt] Donner sans justification les solutions de l'équation (E') : $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\alpha}{u} g(u,v)$.

c) [1.5 pt] En déduire qu'il existe $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in U,\ f(x,y) = F\left(\dfrac{y}{x}\right) x^{\alpha}$

2) a) [1 pt] Donner sans justification les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ u \longmapsto y(u)$ de classe C^1 vérifiant

$$y'(u) + y(u) = au + c \quad , \text{ où } a \text{ et } c \text{ sont des réels fixés}$$

Conseil : Chercher une solution particulière de l'équation différentielle sous une certaine forme.

b) [1 pt] Donner sans justification les fonctions $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \ (u,v) \to g(u,v)$ de classe C^1 vérifiant

$$\frac{\partial g}{\partial u} + g = au + bv \quad , \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels fixés}$$

c) [2 pts] Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x,y) \to f(x,y)$ de classe C^1 vérifiant

$$(E) : \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + f = x + y$$

Indication : Utiliser un changement de variables affine $g(u,v) = f(x,y)$ judicieux.

3) On considère le fermé borné $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$.

On note U l'intérieur de A, c'est-à-dire $U = \{(x,y) \in A \mid x > 0 \text{ et } y > 0 \text{ et } x + y < 1\}$.

On considère $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $\boxed{f(x,y) = (1-x-y)xy = xy - x^2y - xy^2}$.

On vérifie aisément (*admis ici*) que $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ est l'unique point critique (= de gradient nul) de f sur U.

a) [1.5 pt] Calculer la matrice Hessienne de f en ce point critique. Que peut-on en déduire ?

b) [1.5 pt] Déterminer $\sup_A f$ et $\inf_A f$, en justifiant votre réponse.

c) *Question supplémentaire*

Expliquer comment on peut retrouver $\sup_A f$ en utilisant une inégalité de convexité.

4) Soient $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ matrice symétrique définie positive et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞.

On considère le système différentiel d'ordre 2 à coefficients constants $\boxed{(E) : X''(t) = -S\ X(t)}$

Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante

a) [1 pt] On définit l'énergie par $f(t) = \dfrac{1}{2}(X \mid SX) + \dfrac{1}{2}\|X'\|^2$.

On suppose que X vérifie (E). Montrer que f est constante.

b) [2 pts] On note $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de S.

On considère $(Z_1, ..., Z_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de S, de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

En utilisant un changement de variable judicieux, déterminer les solutions de (E).

On posera $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$, et on exprimera $X(t)$ en fonction des ω_k et des Z_k.

c) [0.5 pt] L'ensemble Δ des solutions est un sev de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension $2n$.

Expliciter sans justification un isomorphisme de Δ sur $\mathbb{R}^{2n}$.

On pourra s'inspirer du théorème de Cauchy-Lipschitz.

5) [2 pts] Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (t, x, y) \longmapsto f(t, x, y)$ une fonction continue. On pose

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ J(x, y) = \int_0^1 f(t, x, y) \ dt$$

En utilisant la caractérisation séquentielle, montrer que J est continue sur $\mathbb{R}^2$.

6) [3 pts] Proposer une fonction $f(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) x^n$ définie sur $[0, +\infty[\times [0, 1[$ et vérifiant

$$(E) : \begin{cases} \forall (t, x) \in [0, +\infty[\times [0, 1[, \ \ \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x) + x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) + x \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0 \\ \forall x \in [0, 1[, \ \ f(0, x) = \dfrac{1}{1 - x} \end{cases}$$

Justifier avec soin que la solution proposée vérifie (E).

Rappel : On sait que les séries entières de rayon $R > 0$ sont de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et que les dérivées sont obtenues en dérivant terme à terme la série entière.

7) (*début sujet X PC*)

On note F le sev des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation

$$(E_\lambda) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \lambda \int_0^x f(t) \ dt = e^x$$

a) [0.5 pt] Montrer que si f vérifie (E_λ), alors f vérifie nécessairement une équation différentielle.

b) [0.5 pt] En utilisant $f(0)$ et a), proposer une CNS pour que f vérifie (E_λ).

c) [2 pts] Résoudre (E_λ).