Interrogation n°17. Corrigé

1) On a $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},0\right)=1$ et $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 1$.

On en déduit que f n'admet pas de limite en $(0,0)$.

2) On a aussi $f(x,0)=\varphi(|x|)=\mathfrak{o}\,(x)$, car $\varphi'(0)=0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})$.

Pour $(x,y)\neq(0,0)$, on a : $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\leq\left|\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\right|\to 0$ lorsque (x,y) tend vers 0.

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en $(0,0)$.

3) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\varphi'(x^2+y^2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\varphi'(x^2+y^2)$.

Donc f vérifie (E) ssi $\forall t>0,\ 2t\varphi'(t)=2$, c'est-à-dire $\varphi(t)=\ln t+k$, où k constante.

4) a) $g(X)=f(AX)=g(\overrightarrow{0})+(\nabla f(\overrightarrow{0})\mid AX)+\frac{1}{2}(AX\mid H_f(\overrightarrow{0})(AX))+\mathfrak{o}\,(\|AX\|^2)$ lorsque X tend vers $\overrightarrow{0}$.

On a $\|AX\|^2=O(\|X\|^2)$ car A lipschitzienne et $(AX\mid H_f(\overrightarrow{0})(AX))=(X\mid A^TH_f(\overrightarrow{0})AX)$.

Donc $g(X)=f(AX)=g(\overrightarrow{0})+(A^T\nabla f(\overrightarrow{0})\mid X)+\frac{1}{2}(X\mid A^TH_f(\overrightarrow{0})AX)+\mathfrak{o}\,(\|X\|^2)$.

Par unicité du DL_2 (cf addendum en fin de corrigé), on a donc $H_g(\overrightarrow{0})=A^TH_f(\overrightarrow{0})A$.

b) On a $\Delta g(\overrightarrow{0})=\mathrm{tr}(H_g(\overrightarrow{0}))=\mathrm{tr}(A^TH_f(\overrightarrow{0})A)=\mathrm{tr}(H_f(\overrightarrow{0})AA^T)=\mathrm{tr}(H_f(\overrightarrow{0}))=\Delta f(\overrightarrow{0})$, car $AA^T=I_p$.

5) a) L'application $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\quad(s,p)\longmapsto s^2-4p$ est continue, et on a $U=\phi^{-1}(]0,+\infty[)$.

Donc U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue.

b) On a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial s}(x+y,xy)+y\frac{\partial f}{\partial p}(x+y,xy)$.

D'où $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(x+y,xy)+2y\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial p}(x+y,xy)+y^3\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}(x+y,xy)$.

c) d) *Remarque* : φ est une bijection car $(x,p)=(x+y,xy)$ ssi x et y sont les racines du polynôme X^2-sX+p, qui sont réelles distinctes ssi le discriminant $\Delta=s^2-4p$ est strictement positif.

Comme $x<y$, on a $x=\frac{1}{2}\left(s-\sqrt{s^2-4p}\right)$ et $y=\frac{1}{2}\left(s+\sqrt{s^2-4p}\right)$.

On vérifie aisément que ces fonctions sont de classe C^1 sur U, donc φ^{-1} est bien de classe C^1.

On a $J_\varphi(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\y&x\end{pmatrix}$, donc $J_\varphi(x,y)^{-1}=\frac{1}{x-y}\begin{pmatrix}x&-1\\-y&1\end{pmatrix}$.

Or, on sait que $J_{\varphi^{-1}}(s,p)=J_\varphi(x,y)^{-1}$, donc $\frac{\partial x}{\partial s}(s,p)=\frac{x}{x-y}$ et $\frac{\partial x}{\partial p}(s,p)=\frac{-1}{x-y}$.

Remarque : On peut naturellement retrouver ces valeurs en utilisant $x=\frac{1}{2}\left(s-\sqrt{s^2-4p}\right)$.

6) a) On considère $g(t)=f(X(t))$. On a g de classe C^1 et $g'(t)=\nabla f(X(t))\cdot X'(t)$.

Comme $g(b)-g(a)=\int_a^b g'(t)\,dt$, alors $f(X(b))-f(X(a))=\int_a^b\nabla f(X(t))\cdot X'(t)\,dt$.

b) On a ici $\nabla f(X(t)) \cdot X'(t) = \|\nabla f(X(t))\| \, \|X'(t))\| \geq m \, \|X'(t))\|$.

De plus, par l'inégalité triangulaire, $\int_a^b \|X'(t))\| \; dt \geq \left\| \int_a^b X'(t))dt \right\| = \|X(b) - X(a)\|$. D'où le résultat.

7) a) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X) = \dfrac{x_j}{\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}}$, donc $\nabla f(X) = \dfrac{X}{\|X\|}$.

b) On a $\|X+H\|^2 = \|X\|^2 + 2\langle X, H\rangle + \|H\|^2$.

Donc $\|X+H\| = \|X\| \sqrt{1 + 2\dfrac{\langle X, H\rangle}{\|X\|} + \mathfrak{o}(\|H\|)} = \|X\| \left(1 + \dfrac{\langle X, H\rangle}{\|X\|} + \mathfrak{o}(\|H\|)\right)$ lorsque $H \to \overrightarrow{0}$.

D'où $\|X+H\| = \|X\| + \left\langle \dfrac{X}{\|X\|}, H \right\rangle + \mathfrak{o}(\|H\|)$. On retrouve (unicité du DL_1) que $\nabla f(X) = \dfrac{X}{\|X\|}$.

8) Rappel : $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$, donc $|t^z| = e^{t \operatorname{Re} z} = t^{\operatorname{Re} z}$.

a) On a $\left|t^{z-1} \; e^{-t}\right| = t^{x-1} \; e^{-t}$ intégrable (car $t^{x-1} \; e^{-t} \sim_0 t^{x-1}$ et $t^{x-1} \; e^{-t} = O_{+\infty}(t^{-2})$).

b) On fixe $y \in \mathbb{R}$. Posons $g(x,t) = t^{x+iy-1} \; e^{-t}$. On a $x \longmapsto t^{x+iy-1} \; e^{-t}$ est continue (pour t fixé).

On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = (\ln t) \; t^{x+iy-1} \; e^{-t}$. Soit un segment arbitraire $[a,b] \subset]0, +\infty[$.

On a $\forall x \in [\alpha, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \begin{cases} (\ln t) \; t^{\alpha-1} \; e^{-t} \text{ si } t < 1 \\ (\ln t) \; t^{b-1} \; e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \end{cases} = \varphi(t)$, avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$ (Bertrand).

Par le th de dérivation des intégrales paramétrées, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et vaut $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) \; dt$.

b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

d) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans U convergeant vers $z \in U$. Posons $f_n(t) = t^{z_n - 1} \; e^{-t}$.

On a $\forall t \in]0, +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(t)$, où $f(t) = t^{z-1} \; e^{-t}$.

Posons $z = x + iy$. Pour $n \geq n_0$ assez grand, $\dfrac{1}{2}x \leq x_n \leq 2x$. Posons $a = \dfrac{1}{2}x$ et $b = 2x$.

Donc $\forall n \geq n_0$, $|f_n(t)| \leq \begin{cases} (\ln t) \; t^{a-1} \; e^{-t} \text{ si } t < 1 \\ (\ln t) \; t^{b-1} \; e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \end{cases} = \varphi(t)$, avec φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

Par convergence dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) \; dt = \int_0^{+\infty} f(t) \; dt$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \Gamma(z_n) = \Gamma(z)$.

Par caractérisation séquentielle, Γ est continue sur U.

9) a) On considère $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(x + tv)$. On a $g'(t) = \nabla f(x+tv) \cdot v$.

Donc $f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{x}) = \int_0^1 g'(t) \; dt = \int_0^1 \nabla f(x+tv) \cdot v \; dt$.

b) Supposons (ii). Alors $\nabla f(x+tv) \cdot v = 0$, car v appartient à l'orthogonal de F. D'où (i) par a).

Réciproquement, supposons (ii). On considère $(x,v) \in E \times F^\perp$.

On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(x+tv) - f(x) = 0$. Donc $g'(0) = 0$, c'est-à-dire $\nabla f(x) \cdot v = 0$.

Comme v est arbitraire, $\nabla f(x) \in (F^\perp)^\perp = F$.

c) On prend $F = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_r)$, où les e_j sont les vecteurs de la base canonique.

D'où $F^\perp = \operatorname{Vect}(e_{r+1}, ..., e_{r+p})$.

(i) équivaut à : Pour tout $(x,v) \in E \times F^\perp$, $f(x+v) = f(x)$.

On a cel équivaut à : $f(x_1,...,x_r,x_{r+1},...,x_p) = f(x_1,...,x_r,0,...,0)$.

En particulier, comme f est C^2 et $\varphi(x_1,...,x_r) = f(x_1,...,x_r,0,...,0)$, alors φ est C^2.

(ii) équivaut à : Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, $\nabla f(x) \in F$.

Donc (i) équivaut à (ii) par b). Montrons désormais que (ii) équivaut à (iii).

La j-ième colonne (ou ligne) de la Hessienne $H_f(x)$ contient les coefficients du gradient de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$.

Or, une fonction est nulle ssi elle vaut 0 en $\overrightarrow{0}$ et son gradient est nul.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est nulle ssi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\overrightarrow{0}) = 0$ et la j-ième colonne de $H_f(x)$ est nulle. Donc (ii) équivaut à (iii).

Addendum question 4) a) : Montrons l'unicité du DL_2 :

Supposons $\alpha + (V \mid X) + \dfrac{1}{2}(X \mid AX) + \mathfrak{o}(\|X\|^2) = \beta + (W \mid X) + \dfrac{1}{2}(X \mid BX) + \mathfrak{o}(\|X\|^2)$,

où α et β sont réels, V et W des vecteurs, A et B des matrices symétriques.

On montre d'abord que $\alpha = \beta$, puis on montre (comme dans le cours que $V = W$).

On a donc $(X \mid AX) = (X \mid BX) + \mathfrak{o}(\|X\|^2)$.

On fixe X et on considère $t \longmapsto tX$. On obtient $t^2(X \mid AX) = t^2(X \mid BX) + \mathfrak{o}\,(t^2)$ lorsque $t \longmapsto 0$.

On divise par t^2 et on en déduit en faisant tendre t vers 0^+, que $(X \mid AX) = (X \mid BX)$.

On conclut alors en utilisant le lemme suivant :

Lemme : Soient A et $B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(X \mid AX) = (X \mid BX)$.

Première preuve : On a $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(X \mid (A-B)X) = 0$.

Supposons par l'absurde $A \neq B$. Donc la matrice symétrique $(A - B)$ n'est pas nulle.

Elle admet donc un vecteur propre X de valeur propre $\lambda \neq 0$.

On a donc $(X \mid (A-B)X) = \lambda \|X\|^2 \neq 0$, d'où une contradiction.

Seconde preuve (conseillée) :

On utilise l'**identité de polarisation** pour les formes bilinéaires symétriques :

on a en effet $(X+Y \mid A(X+Y)) = (X \mid AX) + 2(X \mid AY) + (Y \mid AY)$, car A symétrique.

Donc $2(X \mid AY) = (X+Y \mid A(X+Y)) - (X \mid AX) - (Y \mid AY)$.

Autrement dit, la forme bilinéaire est entièrement définie par la forme quadratique :

$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$, où $q(x) = \varphi(x,x)$ et φ forme bilinéaire symétrique.

On a donc $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $(X \mid AY) = (X \mid BY)$.

En prenant $X = E_i$ et $Y = E_j$, on obtient $a_{ij} = b_{ij}$. Donc on a bien $A = B$.