Interrogation n°17. Corrigé

1) Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})$.

On a aussi $f(x,0) = \varphi(|x|) = \mathfrak{o}\,(x)$, car $\varphi'(0) = 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on a donc : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq \left|\varphi'(\sqrt{x^2+y^2})\right| \to 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ lorsque $\overrightarrow{x}$ tend vers $\overrightarrow{0}$.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en $(0,0)$.

2) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(X) = \dfrac{x_j}{\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}}$ donc $\nabla f(X) = \dfrac{X}{\|X\|}$.

3) a) On a $g'(\theta_0) = 0$, donc $-\sin\theta_0\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0) + \cos\theta_0\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 0$, c'est-à-dire $\det(X_0, \operatorname{grad} f(X_0)) = 0$.

b) Soit $V \in H_0 : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. On considère $g(t) = f(X_0 + tV)$. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $X_0 + tV \in H$.

Donc g atteint son maximum en $t = 0$. Donc $g'(0) = 0$, c'est-à-dire $\nabla f(X_0)\cdot V = 0$.

Donc $\nabla f(X_0)$ appartient à $H_0^{\perp}$, c'est-à-dire $\nabla f(X_0)$ est colinéaire à n.

4) a) On a $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \int_0^x \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,y)\ dt$.

b) On a $J(x) = F(x,x)$. Comme F est C^1, J est C^1, et $J'(x) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,x) = f(x,x) + \int_0^x \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,x)\ dt$.

5) a) On a $g'(t) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) = \langle V(tX), X\rangle$.

Et $g''(t) = x^2\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(tx,ty) + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(tx,ty) + y^2\dfrac{\partial f}{\partial t^2}(tx,ty) = \langle X, H(tX)X\rangle$.

b) Par la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, on a

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t)\ g''(t)\ dt$$

On obtient donc $f(X) = f(\overrightarrow{0}) + \left\langle V(\overrightarrow{0}), X\right\rangle + \int_0^1 (1-t)\ \ \langle X, H(tX)X\rangle\ \ dt$.

6) a) Les coefficients de $H_j(X)$ sont les $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(X)$, avec $1 \leq i \leq n$. Donc $H_j(X) = \dfrac{\partial V}{\partial x_j}(X)$.

b) $H(X)$ est la matrice jacobienne de V en X.

c) La différentielle de V en $\overrightarrow{0}$ est donc l'application linéaire $u : X \longmapsto H(\overrightarrow{0})X$.

d) On a $V(X) = V(\overrightarrow{0}) + H(\overrightarrow{0})X + \mathfrak{o}\,(\|X\|)$.

Remarque : On a de même $V(X) = V(\overrightarrow{0}) + \int_0^1 H(tX)X\ dt = V(\overrightarrow{0}) + \int_0^1 \sum_{j=1}^n x_j \dfrac{\partial V}{\partial x_j}(tX)\ dt$.

7) a) On sait que $f(X_0 + X) = f(X_0) + \left\langle \nabla f(\overrightarrow{0}), X\right\rangle + \mathfrak{o}\,(\|X\|)$.

En faisant la différence des deux DL, on obtient donc $\langle W, X\rangle = \mathfrak{o}\,(\|X\|)$, où $W = \nabla f(\overrightarrow{0}) - V$.

On prend $X = tW$ avec $t \to 0$. On obtient $t\,\|W\|^2 = \mathfrak{o}\,(t)$, donc $\|W\|^2 = 0$, c'est-à-dire $\nabla f(\overrightarrow{0}) = V$.

b) (i) On a $g(x_1,...,x_n) = f(y_1,...,y_n)$, avec $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$.

Donc $\dfrac{\partial g}{\partial x_j}(X) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\ \dfrac{\partial f}{\partial y_i}(u(X))$. Donc $W = A^T V$.

(ii) On a $f(X) = f(u(X)) + \langle \nabla f(X_0), X\rangle + \mathfrak{o}\,(\|X\|)$.

Donc $f(u(X_0 + X)) = f(u(X_0) + u(X)) = f(u(X_0)) + \langle \nabla f(u(X_0)), AX\rangle + \mathfrak{o}\,(\|AX\|)$.

On a $\|AX\| = O(\|X\|)$, donc on obtient le DL : $f(u(X_0 + X)) = f(u(X_0)) + \left\langle A^T V, X\right\rangle + \mathfrak{o}\,(\|AX\|)$.

Par a), on en déduit $W = A^T V$.

8) a) Soit $(x_0, y_0) \in D(R)$. Posons $r_0 = |x_0 + iy_0|$ et ρ tel que $r_0 < \rho < R$.
La série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z^{n-1}$ est de même rayon que $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n z^n$. Il existe donc M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|na_n \rho^n| \leq M$.
Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $|x + iy_0| \leq \rho$.
Posons $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $\omega_n(x) = a_n(x + iy_0)^n$. On a $\omega_n'(x) = na_n(x + iy_0)^{n-1}$.
La série de fonctions $\sum \omega_n'$ est normalement convergente sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, car

$$\sup_{x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]} \left|\omega_n'\right| \leq n\,|a_n|\,\rho^{n-1} \text{ et la série} \sum n\,|a_n|\,\rho^{n-1} \text{ converge}$$

On en déduit que $x \longmapsto F(x, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n(x)$ est dérivable en x_0 et on a
$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x_0 + iy_0)^{n-1} = g(x_0 + iy_0)$.
Variante : On définit ω_n sur tpout l'ouvert $]x_{\min}, x_{\max}[$ de sorte que $\forall x \in]x_{\min}, x_{\max}[$, $|x + iy_0| < R$.
Soit un segment $J = [\alpha, \beta] \subset]x_{\min}, x_{\max}[$. On a alors $\rho = \sup_{x \in J} |x + iy_0| < R$.
On en déduit comme ci-dessus la convergence normale de $\sum \omega_n'$ sur J.
b) *Remarque* : L'application $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ est continue sur $D(R)$ comme somme d'une série entière de rayon R.
En effet, la série de fonctions $\sum na_n z^{n-1}$ convergence normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(\rho)$, avec $\rho < R$.
Donc la fonction $z \longmapsto \sum na_n z^{n-1}$ est continue comme fonction de z, donc comme fonction de (x, y).

Remarque : On peut prouver la continuité par la caractérisation séquentielle : soit une suite $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers (x, y). Alors la suite $k \longmapsto \frac{\partial F}{\partial x}(x_k, y_k)$ converge vers $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ par convergence normale (donc uniforme) par rapport à k : il existe en effet $\rho < R$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|x_k + iy_k| \leq \rho$, de sorte que la série $\sum \sup_{k \in \mathbb{N}} \left|(na_n x_k + iy_k)^{n-1}\right|$ converge normalement (car $\sum n\,|a_n|\,\rho^{n-1}$ converge).

Remarque : Une variante consiste à utiliser le th de convergence dominée pour les séries.

9) a) On pose $H = Y - X$.
On a $|f(Y) - f(X)| = \left|\int_0^1 \nabla f(X + tH) \cdot H \, dt\right| \leq \int_0^1 |\nabla f(X + tH) \cdot H| \, dt \leq \int_0^1 \|H\| \, dt = \|H\|$.
Il y a égalité ssi $\forall t \in [0, 1]$, $|\nabla f(X + tH) \cdot H| = \|H\|$, donc ssi $\nabla f(X + tH) = \pm \dfrac{H}{\|H\|}$.
(*Remarque* : par continuité de ∇f, le $\pm$ ne dépend pas de t).

Remarque : Pour justifier rigoureusemet le cas d'égalité, il faut utiliser la propriété : si g et h sont continues avec $g \leq h$ sur $[0, 1]$, alors $\int_0 g = \int_0^1 h$ ssi $g = h$: on se ramène au cas connu en considérant $\delta = h - g$.

b) Posons $g(t) = f(X(t))$. On a $g'(t) = \nabla f(X(t)) \cdot X'(t) = 1$.
Donc $|f(X(t)) - f(X(s))| = |g(t) - g(s)| = |t - s|$.
Or, on a $\|X(t) - X(s)\| \leq \int_s^t \|X'(t\| \, dt = |t - s|$. donc $|f(X(t)) - f(X(s))| \geq \|X(t) - X(s)\|$.
Or, par a), on a $\|X(t) - X(s)\| \leq |f(X(t)) - f(X(s))|$.
Donc il y a égaité et par a), le gradient est constant sur le segment $[X(t), X(s)]$ et dirigé selon le segment.

c) On en déduit (via le théorème de Cauchy-Lipschitz) que les trajectoires $t \longmapsto X(t)$ sont des droites le long desquelles le gradient est constant. Ces différentes droites ne peuvent se croiser (sinon, le gradient prendrait deux valeurs différentes. Donc les droites sont parallèles, et comme elles sont dirigées par le gradient, le gradient est constant. Donc la fonction est affine.