Interrogation n°16. Corrigé

1) a) Avec le théorème spectral, on montre que $\sup_{X\in S}(X \mid MX) = \max \mathrm{Sp}(M)$.

b) On a $\|AX\|^2 = (AX \mid AX) = (X \mid A^T AX)$, donc $N(A)^2 = \max \mathrm{Sp}(A^T A)$.

c) On a pour tout $X \in E$, $\|AX\| \leq N(A)\,\|X\|$, car pour X non nul, $\dfrac{\|AX\|}{\|X\|} = \left\| A\left(\dfrac{X}{\|X\|}\right)\right\| \leq N(A)$.

Donc $\forall X \in S$, $\|ABX\| \leq N(A)\,\|BX\| \leq N(A)N(B)\,\|X\| = N(A)N(B)$, donc $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

d) Lorsque X décrit S, UX décrit S (car $X = UU^T X$), donc $N(AU) = N(A)$.

Autre preuve : $(AU)^T(AU) = U^{-1}(A^T A)U$, donc $\mathrm{Sp}((AU)^T(AU)) = \mathrm{Sp}(A^T A)$, et on conclut par b).

e) On a $\|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n (\sum a_{ij}x_j)^2$. Par Cauchy-Schwarz, $(\sum a_{ij}x_j)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)$.

Donc $\forall X \in S$, $\|AX\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = N_F(A)^2$, d'où $N(A) \leq N_F(A)$.

Autre preuve : Les valeurs propres de $A^T A$ sont positives, car $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Donc $N_F(A)^2 = \mathrm{tr}(A^T A) \geq \max \mathrm{Sp}(A^T A) = N(A)^2$.

On a $\|ABX\|_\infty = \|A(BX)\|_\infty \leq N(A)\,\|BX\|_\infty \leq N(A)N(B)\,\|X\|_\infty$, donc $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

2) a) *Remarque* : Il s'agit de prouver que $N(A)$ est réel (c'est-à-dire $< +\infty$) et est atteint.

La fonction $f : O_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\ \ U \longmapsto \mathrm{tr}(AU) = \sum_{i,j} a_{ij}u_{ji}$ est continue.

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact (fermé borné) et non vide, f est bornée et atteint sa borne supérieure.

b) On considère $U \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $N(A) = \mathrm{tr}(AU)$.

On prend $V = -U \in O_n(\mathbb{R})$. On a $-N(A) = \mathrm{tr}(AV) \leq N(A)$, donc $N(A) \geq 0$.

c) Supposons $N(A) = 0$. Alors $\forall U \in O_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AU) \leq 0$.

Par linéarité de $U \longmapsto \mathrm{tr}(AU)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AM) \leq 0$.

Mais en considérant M et $-M$, on en déduit que $\mathrm{tr}(AM) = 0$ pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc A est orthogonal à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le psc $(M, N) = \mathrm{tr}(M^T N)$. Donc $A = O_n$

Variante : On prend $M = A^T$. D'où $\mathrm{tr}(AA^T) \leq 0$, c'est-à-dire $\sum_{i,j} a_{ij}^2 \leq 0$, d'où $A = O_n$.

3) a) Comme les normes sont équivalentes, $\sum \|A_n\|_\infty$ converge.

Donc toutes les séries associées aux coordonnées convergent absolument, c'est-à-dire $\sum A_n$ converge.

4) a) *Remarque* : On a $AF = \mathrm{Vect}(A, A^2, ..., A^r)$, donc F stable par A ssi $A^r \in F$.

On sait que A admet un polynôme annulateur non nul dont on note r le degré r.

Alors $A^r \in \mathrm{Vect}(I, A, ..., A^{r-1})$, c'est-à-dire $F = \mathrm{Vect}(I, A, ..., A^{r-1})$ stable par A.

Autre preuve : la suite des sev $F_p = \mathrm{Vect}(I, A, ..., A^{p-1})$ est croissant pour l'inclusion, donc constante par dimension, et ainsi il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $F_r = F_{r+1}$, ce qui équivaut à F_r stable par A.

Variante : On considère $r = \min\{k \in \mathbb{N},\ (I, A, ..., A^k) \text{ liée }\}$, qui existe car $\dim \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = p^2$.

$(I, A, ..., A^{r-1})$ est libre et $(I, A, ..., A^r)$ est liée, donc $A^r \in \mathrm{Vect}(I, A, ..., A^{r-1}) = F$ stable par A.

Variante : La famille $(I, A, ..., A^{(p^2)})$ est liée, donc une matrice A^r est combinaison linéaire des précédentes.

b) Comme F est stable par A, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$, et plus généralement $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A) \in F$.

Or, $B = \lim_{n\to+\infty} P_n(A)$, où $P_n(X) = \sum_{k=0}^n u_k A^k$. On a $P_n(A) \in F$.

Comme F est fermé (en tant que sev de dimension finie), alors $B \in F$.

5) a) On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|x_{n+1} - x_n\| = \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \leq k\,\|x_n - x_{n-1}\|$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$. Donc la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ converge.
A fortiori, la série de vecteurs $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge, c'est-à-dire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) (*existence*) Considérons $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$, où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie au a) avec x_0 arbitraire.
Comme f est lipschitzienne, f est continue, donc $f(x) = x$. D'où l'existence d'un point fixe.

(*unicité*) Soient x et y deux points fixes. On a $\|x - y\| = \|f(x) - f(t)\| \leq k\|x - y\|$, donc $\|x - y\| = 0$ car $k < 1$.

6) *Remarque culturelle* : Par le cours, on a vu que $N(A) = \sup_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
a) (i) D'autre part, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, il existe X non nult el que $AX = \lambda X$, donc $\dfrac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty} = |\lambda|$.
Ainsi, $|\lambda| \leq N(A)$, donc $\rho(A) \leq N(A)$.

(ii) Si $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, alors $AX = (\lambda_1 x_1, ..., \lambda_p x_p)$. On a $\sup_{1\leq j\leq n}(|\lambda_j|) = \rho(A)$.
Donc $\|AX\|_\infty \leq \rho(A)\|X\|_\infty$, avec des cas d'égalité. Donc $N(A) = \rho(A)$.
(iii) En revanche, en prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\rho(A) = 0 < 1 = N(A)$.

b) Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ diagonale. On prend $\boxed{N'(B) = N(PBP^{-1})}$.
On vérifie aisément que N' est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On a donc $N'(A) = N(D) = \rho(D) = \rho(A)$, car A et D sont semblables.

Remarque : N' est aussi une norme subordonnée, donc en particulier une norme d'algèbre.

c) Par b), on peut supposer A diagonalisable.
On sait qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
On prend $N'(B) = N(PBP^{-1})$. On a $N'(A) = N(T) = \max(|\lambda| + \varepsilon, |\mu|) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Remarque : La propriété est vraie en toute dimension, car on peut toujours trouver une matrice T semblable à A dont les coefficients non diagonaux sont en module inférieurs ou égaux à ε.

7) Δ est l'ensemble des matrices de symétrie, c'est-à-dire diagonalisables de spectre inclus dans $\{-1, 1\}$.

- Δ n'est pas borné, car $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \Delta$ et la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

On peut aussi utiliser les matrices $A_n = \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1/n & 0 \end{pmatrix} \in \Delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Δ est fermé : si $A = \lim_{n\to+\infty} A_n$, avec $A_n \in \Delta$, alors $A^2 = \lim_{n\to+\infty}(A_n)^2 = I_2$, donc $A \in \Delta$.
- Δ est fermé et distinct de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc n'est pas dense (son adhérence est Δ).
- Δ n'est pas ouvert : $I_2 = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Diag}(1, 1 + \frac{1}{n})$ est limite de matrices n'appartenant pas à Δ.
- Δ n'est pas convexe : I_2 et $-I_2$ appartiennent à Δ, mais leur moyenne O_2 n'appartient pas à Δ.

b) (i) Supposons $A \in \Delta$ distinct de I_2 et $-I_2$. Alors A est semblable à $\mathrm{Diag}(-1, 1)$.
Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P\,\mathrm{Diag}(1, -1)P^{-1}$.

Posons $A_n = P\begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$. On a $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ et $A_n \in \Delta$ et $A_n \neq A$. Donc A n'est pas isolé dans A.

(ii) Montrons que I_2 est isolé.
Notons que $\mathrm{tr}\, I_2 = 2$ et que pour tout $A \in \Delta$ distinct de I_2, $\mathrm{tr}\, A = 0$ ou -2.
Comme $B \longmapsto \mathrm{tr}\, B$ est continue, alors il n'existe aucune suite de Δ' convergeant vers A.

8) (ii) implique (i) aisément : $\int_0^1 z(t)\ dt = e^{i\theta} \int_0^1 \rho(t)\ dt$, donc $\left|\int_0^1 z(t)\ dt\right| = \int_0^1 \rho(t)\ dt = \int_0^1 |z(t)|\ dt$.

La réciproque est beaucoup plus compliqué. Posons $\int_0^1 z(t)\ dt = Ae^{i\theta}$.

On considère alors $f(t) = \mathrm{Re}(z(t)e^{-i\theta})$. On a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $|f(t)| \leq |z(t)|$.

Or, $\left|\int_0^1 f(t)\ dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)|\ dt \leq \int_0^1 |z(t)|\ dt$. Mais, avec (i), on a $\left|\int_0^1 f(t)\ dt\right| = A = \int_0^1 |z(t)|\ dt$.

Donc nécessairement, f est de signe constant et $\forall t \in [0,1],\ |f(t)| = |z(t)|$.

Donc $z(t)e^{-i\theta}$ est réel de signe constant. On en déduit $f(t) = \pm\rho(t)e^{i\theta}$. Et ρ continue car f continue.

Remarque : Soit $X : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continue, avec $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne canonique .

On montre de façon analogue que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\left\|\int_0^1 X(t)\ dt\right\| = \int_0^1 \|X(t)\|\, dt$

(ii) Il existe $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continue et $V \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall t \in [0,1],\ X(t) = \rho(t)V$.

4) a) Comme les normes sont équivalentes, $\sum \|A_n\|_\infty$ converge.

Donc toutes les séries associées aux coordonnées convergent absolument, c'est-à-dire $\sum A_n$ converge.

b) On a $N\left(\dfrac{t^n A^n}{n!}\right) \leq \dfrac{|t|^n\, N(A)^n}{n!}$. Comme$\sum \dfrac{(|t|\, N(A))^n}{n!}$ converge, alors $\sum N\left(\dfrac{t^n A^n}{n!}\right)$ converge.

Donc $M(t)$ est bien définie. On fixe désormais i et $j \in [\![1,p]\!]$.

Posons $f_{ij}(t) = \left(\dfrac{t^n A^n}{n!}\right)_{ij}$. On a $\sup_{[-\rho,\rho]} |f_{ij}(t)| \leq \rho^n \left\|\dfrac{A^n}{n!}\right\|_\infty$.

Comme $\sum N\left(\dfrac{\rho^n A^n}{n!}\right)$ converge, alors $\sum \rho^n \left\|\dfrac{A^n}{n!}\right\|_\infty$ converge (car les normes sont équivalentes).

On en déduit que $\sum f_{ij}$ converge normalement sur $[-\rho,\rho]$, donc $M_{ij} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{ij}$ est continue.

Comme i et j sont arbitraires, M est continue.

Remarque : On montre de même (en considérant $\sum f'_{ij}$) que M est de classe C^1, et que $M'(t) = AM(t)$.

8) a) $\int_0^1 \langle V, X(t)\rangle \; dt \leq \int_0^1 \|V\|\,\|X(t)\| \; dt$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\langle V, X(t)\rangle \leq \|V\|\,\|X(t)\|$.

En cas d'égalité, on a $\int_0^1 \varphi(t)\; dt = 0$, où $\varphi(t) = \|V\|\,\|X(t)\| - \langle V, X(t)\rangle$.

Comme φ est continue et positive, l'intégrale est nulle ssi $\forall t,\ \varphi(t) = 0$.

Cette condition implique que $X(t)$ et V sont colinéaires de même sens, et comme V n'est pas nul, il existe $\rho(t)$ tel que $X(t) = \rho(t)\ V$. Comme X est continue, alors ρ est continue (on se place par exemple dans une base où le premier vecteur est V : $\rho(t)$ est alors la coordonnée de $X(t)$ dans cette base).

b) (ii) implique (i) : On a en effet :

$$\left\|\int_0^1 X(t)\; dt\right\| = \left\|\left(\int_0^1 \rho(t)\; dt\right) V\right\| = \left(\int_0^1 \rho(t)\; dt\right) \|V\| = \left(\int_0^1 \rho(t)\ \ \|V\|\ \ dt\right) = \int_0^1 \|X(t)\|\, dt.$$

Réciproquement, supposons (i) : $\left\|\int_0^1 X(t)\; dt\right\| \leq \int_0^1 \|X(t)\|\, dt$.

Posons $\boxed{V = \int_0^1 X(t)\; dt}$. Si V est nul, alors $\int_0^1 \|X(t)\|\, dt = 0$, donc X est dientiquement nul, d'où (ii).

Supposons désormais V non nul. L'idée est de projeter la relation sur la droite $\mathbb{R}V$:

Alors $\int_0^1 \langle V, X(t)\rangle \; dt = \left\langle V, \int_0^1 X(t)\; dt\right\rangle$ par linéraité de $Y \longmapsto \langle V, Y\rangle$.

Donc $\int_0^1 \langle V, X(t)\rangle \; dt = \langle V, V\rangle = \|V\|^2 = \|V\| \int_0^1 \|X(t)\|\, dt = \int_0^1 \|V\|\,\|X(t)\| \; dt$.

On conclut en utilisant a).