Interrogation n°16. Corrigé

1) a) L'application u est linéaire et définie sur un ev de dimension finie, donc est continue.

b) $A \in O_n(\mathbb{R})$ ssi $A^T A = I_n$. L'application $A \longmapsto A^T A$ est continue, donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé.

Les coefficients d'une matrice $A \in O_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $[-1, 1]$, donc $O_n(\mathbb{R})$ est borné.

c) $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ ssi $A^T = A$ et $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(X \mid AX) \geq 0$.

Chaque des équations ou inéquations larges définit une partie fermée (cf a)).

Donc $S_n^+(\mathbb{R})$ est fermée comme intersection de parties fermées.

2) Vu les rôles symétriques de A et B, il suffit de prouver une implication.

Première preuve : On a $A = PBP^{-1}$, avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Ainsi, $A^k = PB^kP^{-1}$.

L'application $u : M \longmapsto PMP^{-1}$ est linéaire donc continue. D'où $\lim_{k\to+\infty} B^k = O_n$ implique $\lim_{k\to+\infty} A^k = O_n$.

Seconde preuve : $\left\|A^k\right\| \leq \|P\| \ \left\|B^k\right\| \ \left\|P^{-1}\right\|$ en prenant une norme d'algèbre.

Donc $\lim_{k\to+\infty} B^k = O_n$ implique $\lim_{k\to+\infty} A^k = O_n$.

3) a) A trigonalisable, semblable à une matrice triangulaire T. On a alors A^k semblable à T^k.

Les valeurs propres de A^k sont les coefficients diagonaux de T^k. Donc $\mathrm{Sp}(A^k) = \{\lambda^k, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$, d'où $\rho(A^k) = \rho(A)^k$.

b) Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$. Il existe X non nul tel que $BX = \lambda X$. Et $N(B) \geq \dfrac{\|BX\|}{\|X\|} = |\lambda|$.

Donc $N(B) \geq \rho(B)$. On a donc $N(A^k) \geq \rho(A^k) = \rho(A)^k$.

Si $\lim_{k\to+\infty} A^k = O_n$, c'est-à-dire $\lim_{k\to+\infty} N(A^k) = 0$, alors $\lim_{k\to+\infty} \rho(A)^k = .0$, donc $\rho(A) < 1$.

c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. On pose $Y = AX$. Alors $\|Y\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j A_j\right\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \, \|A_j\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \, N(A) = \|Y\| \, M$.

Donc $N(A) \leq M$. Par ailleurs, il existe j tel que $\|A_j\| = M$. On a ainsi $\|AE_j\| = \|A_j\| = M = M \, \|E_j\|$.

Ainsi, M est un majorant qui est atteint, donc $N(A) = M$.

d) On a $\forall X$, $\|ABX\| \leq N(A) \, \|BX\| \leq N(A)N(B) \, \|X\|$, donc $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

e) On a $N_P(AB) \leq N_P(A)N_P(B)$, car $(P^{-1}ABP) = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP)$.

Donc $N_P(A^k) \leq N_P(A)^k \to 0$. Comme N_P est une norme, $\lim_{k\to+\infty} A^k = O_n$.

f) Supposons $\rho(A) < 1$. On prend $\varepsilon > 0$ assez petit pour que $\rho(A) + n\varepsilon < 1$. La matrice A est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients non diagonaux sont en module $\leq \varepsilon$.

Les coefficients diagonaux de T sont en module $\leq \rho(A)$.

Comme $N(T) = \max_{1\leq j\leq n} \|A_j\| \leq \rho(A) + (n-1)\varepsilon$, on a $N(T) < 1$.

Donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $N_P(A) = N(T) < 1$. Par d), $\lim_{k\to+\infty} A^k = O_n$.

4) a) On a $\dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} = \left\langle \dfrac{x}{\|x\|}, u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\rangle$. Lorsque x décrit U, $\dfrac{x}{\|x\|}$ décrit S.

Donc $\sup f(U) = \sup_{x\in S} \langle x, u(x)\rangle = \sup f(S)$.

Comme f est continue sur S compact, f est bornée et atteint ses bornes sur S, donc aussi sur U.

b) On a $\|x_0\| = 1$, donc par continuité de la norme $\|x_0 + th\| > 0$ sur un voisinage V de $t = 0$.

D'autre part, par a), φ est dérivable et atteint son maximum en $t = 0$, donc $\varphi'(0) = 0$.

c) *Remarque* : Pour obtenir l'expression donnée, il faut noter que $\langle x_0, u(h)\rangle = \langle h, u(x_0)\rangle$.

En faisant un $\mathrm{DL}_1(0)$, on obtient $\varphi(t) = \langle x_0, u(x_0)\rangle + 2t(\langle h, u(x_0)\rangle - \langle x_0, u(x_0)\rangle \langle x_0, h\rangle) + \mathfrak{o}(t)$.

Donc $\varphi'(0) = \langle u(x_0), h\rangle - \langle x_0, u(x_0)\rangle \langle x_0, h\rangle$, et comme $\varphi'(0) = 0$, $\lambda = \langle x_0, u(x_0)\rangle$ convient.

d) On a donc $\forall h \in E$, $\langle u(x_0) - \lambda x_0, h\rangle = 0$.

Donc $u(x_0) - \lambda x_0$ est orthogonal à tout vecteur, donc est nul, et x_0 est donc un vecteur propre.

e) On raisonne par récurrence sur $n = \dim E$.

On applique l'hypothèse de récurrence à la restriction $u_{|H}$ de u à l'hyperplan $H = (x_0)^{\perp}$.

En effet, comme la droite $D = \mathbb{R}x_0$ est stable par u symétrique, alors $H^{\perp}$ est stable par u, et la restriction d'un endomorphisme symétrique à un sev stable reste symétrique.

5) a) On note que si $X \in \mathrm{Ker}(A - I_p)$, on a $A^n Y_0 = Y_0$, donc $B_n X = X$.

b) Supposons $X \in \mathrm{Im}(A - I_p)$. Il existe Y tel que $X = AY - Y$.
On a $A^k X = A^{k+1}X - A^k X$, donc $B_n X = \dfrac{1}{n+1}\left(A^{n+1}X - X\right)$.
Comme $\|AX\| \leq N(A)\,\|X\|$, alors $\left\|A^{n+1}X\right\| \leq N(A)^{n+1}\,\|X\| \leq \|X\|$.
On en déduit que $\|B_n X\| \leq \dfrac{2}{n+1}\,\|X\|$, et donc par pincement, $\lim_{n\to+\infty} B_n X = 0$.
c) Par a), si $X \in \mathrm{Ker}(A - I_p)$, $\lim_{n\to+\infty} B_n X = X$.

Donc par b), on a nécessairement $\mathrm{Im}(A - I_p) \cap \mathrm{Ker}(A - I_p) = \{0\}$.
D'où $\mathrm{Im}(A - I_p) \oplus \mathrm{Ker}(A - I_p)$. Or, par le th du rang, on a $\mathrm{rg}(A - I_N) + \dim \mathrm{Ker}(A - I_N) = N$.

Donc on a bien $\mathrm{Im}(A - I_p) \oplus \mathrm{Ker}(A - I_p) = \mathbb{C}^p$.

d) En décomposant X dans $\mathrm{Im}(A - I_p) \oplus \mathrm{Ker}(A - I_p)$, on déduit de a) et b) que $\lim_{n\to+\infty} B_n X = Z$, où Z est le projeté de X sur $\mathrm{Ker}(A - I_p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_p)$.

Comme la propriété est vraie pour tout X (et notamment pour les E_j), $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A - I_p)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_p)$.

6) a) Posons $f(t) = \langle X(t), v\rangle$. On a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et on sait que $f'(t) = \langle X'(t), v\rangle$.
On a $f(0) = f(1)$, donc par le théorème de Rolle, il existe $t \in [0,1]$ tel que $f'(t) = 0$.
b) On a $\overrightarrow{0} = X(1) - X(0) = \int_0^1 X'(t)\,dt$. Par les sommes de Riemann, $\overrightarrow{0} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n X'\left(\dfrac{k}{n}\right)$.
Comme $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^n X\left(\dfrac{k}{n}\right) \in C(\Delta)$, alors $\overrightarrow{0} \in \overline{C(\Delta)}$.

Remarque culturelle : En fait, Δ est compact (image continue du compact $[0,1]$ par X').
Et on peut montrer que $C(\Delta)$ est aussi compact, donc en particulier $\overrightarrow{0}$ appartient à $C(\Delta)$.

7) a) $c_0 = 1$, $c_1 = \dfrac{1}{2}$ et $c_2 = \dfrac{-1}{8}$.
b) Comme $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|\,\|A\|^n$ converge (car $\|A\| < 1$), alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|c_n A^n\|$ converge.
Donc la série de matrices $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n A^n$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

c) On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p} |a_{ij}|$.
La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|c_n A^n\|_\infty$ converge (car toutes les normes sont équivalentes).
On en déduit qu'a fortiori, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n (A^n)_{i,j}|$ converge.
Par Fubini, on a $M_{ij}M_{jk} = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n (A^n)_{i,j}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} c_m (A^n)_{j,k}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m=0}^n c_m c_{n-m} (A^m)_{i,j} (A^{n-m})_{j,k}$.
On a $\sum_{j=1}^p (A^m)_{i,j} (A^{n-m})_{j,k} = (A^n)_{i,k}$. On peut permuter les sommes $\sum_{j=1}^p$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}$, car l'une est finie.
D'où on obtient $(M^2)_{ik} = \sum_{j=1}^p M_{ij}M_{jk} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m=0}^n c_n c_{n-m}\right)(A^{m+n-m})_{i,k}$.
D'où on déduit $M^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{m=0}^n c_n c_{n-m}\right) A^n = I_2 + A$.

d) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n N^n$ est bien définie ici aussi car les termes sont nuls pour $n \geq 3$, car $N^3 = O_3$.
On pose $M = c_0 I_3 + c_1 N + c_2 N^2$.
Par produit de Cauchy, $(c_0 + c_1 x + c_2 x^2)^2 = 1 + x +$ un nombre fini de monômes en x de degré ≥ 3
Donc on a bien $M^2 = I_p + N$.