Interrogation n^{o}15. Corrigé

1) a) $N_1(2X) \neq 2N_1(X)$ et $N_3(X^2 - X) = 0$, donc N_1 et N_3 ne sont pas des normes.

En revanche, $N_2(P) = \sum_{k=0}^n k!\,|a_k|$ est bien une norme.

b) On a $N(P) \geq 0$, et si $N(P) = 0$, alors P admet $0, 1, ..., n$ comme racines, donc $P = 0$ par degré.

On a de façon immédiate $N(\lambda P) = |\lambda|\,N(P)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Enfin, soient P et $Q \in \mathbb{C}_n[X]$.

On connaît l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Donc $N(P+Q) = \sqrt{\sum |(P+Q)(k)|^2} \leq \sqrt{\sum (|P(k)| + |Q(k)|)^2} \leq \sqrt{\sum |P(k)|^2} + \sqrt{\sum |Q(k)|)^2} = N(P) + N(Q)$.

2) a) Soit $x \in [0,1]$. On a $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt$, donc $|f(x)| \leq |f(0)| + x \sup_{[0,x]} |f'|\,|f(0)| + \sup_{[0,1]} |f'|$.

On a $\int_0^x |f'(t)|\ dt \leq \int_0^1 |f'(t)|\ dt \leq \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$, donc $\|f\|_\infty \leq N(f)$.

b) Avec $f_n(x) = t^{n+1}$, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = n+1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = +\infty$, d'où le résultat.

c) Considérons $f_n(x) = \cos(n\pi x)$. On a $f_n'(x) = n\pi \sin(n\pi x)$. On a $\|f_n\|_\infty = 1$.

On a $N(f_n) = n\pi \int_0^1 |\sin(n\pi t)|\ dt = \int_0^{n\pi} |\sin(u)|\ du = n \int_0^\pi |\sin(u)|\ du = 2n$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = +\infty$.

3) a) Par définition de $d(x,F) = \inf\{\|x-a\|,\ a \in F\}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $\lim_{n\to+\infty} \|x - a_n\| = d(x,F)$. La suite $(\|x-a_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée.

Donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car $\|a_n\| \leq \|a_n - x\| + \|x\|$).

b) On peut donc extraire de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers $a \in F$.

Comme $a \longmapsto \|a - x\|$ est continue, alors $\|x - a\| = d(x,F)$.

4) a) Soient s et $t \in \mathbb{R}$, et $\lambda \in [0,1]$. Posons $z(t) = x + ty$. On a $z(\lambda s + (1-\lambda)t) = \lambda z(s) + (1-\lambda) z(t)$.

Donc $f(\lambda s + (1-\lambda)t) = N(z(t)) \leq \lambda N(z(s)) + (1-\lambda) N(z(t)) = \lambda f(s) + (1-\lambda) f(t)$.

b) Soit $t > 0$. On a $N(x+yt) \leq N(x) + N(ty) \leq N(x) + tN(y)$ et $N(x+yt) \geq N(yt) - N(x) \geq tN(y) - N(x)$

Donc $\forall t > 0$, $\left|\dfrac{f(t)}{t} - N(y)\right| \leq \dfrac{N(x)}{t}$, donc par pincement, $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t} = N(y)$.

Variante : Avec la seconde inégalité triangulaire : $|f(t) - tN(y)| \leq N(x + ty - ty) = N(x)$.

5) a) Supposons $\lambda < 1$. On a $(u_n)^{1/n} \leq 1$ pour n assez grand.

Donc $0 \leq u_n \leq 1$ pour n assez grand, d'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Supposons $\lambda > 1$. Pour μ tel que $1 < \mu < \lambda$, on a $(u_n)^{1/n} \geq \mu$ pour n assez grand.

Donc $u_n \geq \mu^n$ pour n assez grand. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : En fait, on peut aussi utiliser directement la composition des limites :

$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} (|u_n|^{1/n})^n = +\infty$ si $\lambda > 1$ et 0 si $\lambda < 1$.

b) Si $\rho < \dfrac{1}{L}$, alors $\lim_{n\to+\infty} (|a_n|\,\rho^n)^{1/n} = L\rho < 1$, donc par a), $(|a_n|\,\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $R \geq \dfrac{1}{L}$.

Si $\rho > \dfrac{1}{L}$, alors $(|a_n|\,\rho^n)^{1/n} = L\rho > 1$, donc par a), $(|a_n|\,\rho^n)^{1/n}$ tend vers $+\infty$, donc $R \leq \dfrac{1}{L}$. Donc $R = \dfrac{1}{L}$.

6) a) On a $g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} n u^{n-1} = \left(\dfrac{1}{1-u}\right)' = \dfrac{1}{(1-u)^2}$, donc $M = \dfrac{1-q}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{1-q}$.

Remarque : Il s'agit de l'espérance d'une v.a. de loi géométrique $G(p)$.

b) $\forall x \in]-1,1[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$, donc $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, car $f(0) = 0$.

Remarque : Il s'agit en fait d'obtenir la somme des termes impairs de $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$.

c) On a $S = \operatorname{ch}(\ln 2) = \dfrac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \dfrac{2 + 1/2}{2} = \dfrac{5}{4}$.

7) a) On a $\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n t^n}{n}$ série entière en t de rayon $R = \dfrac{1}{|z|} > 1$.

Donc φ est C^∞, et on a $\varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n t^{n-1} = \dfrac{z}{1-tz}$.

Remarque : On peut aussi utiliser le th sur les séries de fonctions $\sum f_n(t)$, avec $f_n(t) = \dfrac{z^n t^n}{n}$.
$\sum f_n$ converge simplement et $\sum f_n'$ converge normalement sur $[0,1]$, car $\sup_{[0,1]} |f_n'| = |z|^n$.

b) On a $\phi'(t) = ((1-tz)\varphi'(t) - z)\exp(\varphi(t)) = 0$, donc φ est constante sur l'intervalle $[0,1]$.

En particulier, on a $\varphi(1) = \varphi(0)$, c'est-à-dire $\exp(L(z)) = 1/(1-z)$.

c) On a $|L(z)| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|z|^n}{n} = -\ln(1-|z|)$ par le cours (cf DSE des fonctions usuelles).

d) On a $L(z^k) = O(|z|^k)$ et comme $\sum |z|^k$ converge, alors $\sum L(z^k)$ converge absolument.

8) a) Considérons $0 < \rho < R$. Ainsi, $(|a_n|\,\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $\lambda = \dfrac{1}{\rho}$ convient.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. $\dfrac{|a_n|}{n!}|z|^n = O\left(\dfrac{\rho^n}{n!}|z|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ converge. Donc $R' = +\infty$.

c) Pour $|z| < 1$, $z^{(n^2)} = O(\rho^n)$ pour tout ρ (et notamment $\rho < R$), donc la série converge.

Pour $|z| > 1$ et $\rho > R$, $|z|^{(n^2)} > \rho^n$ pour n assez grand, donc la série diverge. Donc $R'' = 1$.

9) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ série entière de rayon de cv $+\infty$, donc C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $f(0) = 1$.

De même pour $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$, donc g est C^∞ comme quotients de fonctions C^∞ (car f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).

10) $F(x)$ est définie car $f(t) = \dfrac{\cos(tx)}{e^t+1}$ vérifie $f(t) = O_{+\infty}\left(e^{-t}\right)$.

On a $\dfrac{\cos(tx)}{e^t+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^{2n}x^{2n}}{(2n)!(e^t+1)}$. Or, $\int_0^{+\infty} \left|\dfrac{t^{2n}x^{2n}}{(2n)!(e^t+1)}\right| dt \le \dfrac{2x^{2n}}{(2n)!} \int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t}\, dt = 2x^{2n}$.

Donc pour $|x| < 1$, la série $\sum \int_0^{+\infty} \left|\dfrac{t^{2n}x^{2n}}{(2n)!(e^t+1)}\right| dt$ converge.

Par ITT, on a donc $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{2n}x^{2n}}{(2n)!(e^t+1)}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, où $a_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!(e^t+1)}\, dt$.

11) a) L'équation caractéristique $z^2 - 2z - 1$ admet comme racines $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ et $\mu = 1 - \sqrt{2}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \alpha\,\lambda^n + \beta\,\mu^n$, avec $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\lambda + \beta\mu = 1 \end{cases}$, donc $\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ et $\beta = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

On a donc $b_n \sim \alpha\,\lambda^n$, et ainsi $R_b = \dfrac{1}{\lambda}$.

b) On a $\dfrac{2n+1}{n+1} \le 2$. Donc par récurrence immédiate d'ordre 2, $a_n \le b_n$, d'où $R_a \ge R_b$.

c) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \ge p$ assez grand, $\dfrac{2n+1}{n+1} \ge 2 - \varepsilon$.

On a donc $\forall n \ge p$, $a_n \ge c_n$, où c_n est une suite vérifiant $c_{n+2} = (2-\varepsilon)c_{n+1} + c_n$.

(*remarque* : on définit $(c_n)_{n\ge p}$ par $c_p = a_p$ et $c_{p+1} = a_{p+1}$).

On a $R_c \le \dfrac{1}{\lambda_\varepsilon}$, où λ_ε est la plus grande racine (en valeur absolue) de $z^2 - (2-\varepsilon)z - 1$.

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_\varepsilon = \lambda$, alors $R_a \le \dfrac{1}{\lambda}$, d'où on conclut $R_a = \dfrac{1}{\lambda}$.