Interrogation n°15. *Barème sur 24 pts*

1) [1.5 pt] On considère pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \int_0^1 |x + ty|\ dt$.

Montrer brièvement que N est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$.

2) On considère $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$.

a) [1 pt] Montrer que l'application $u : E \to \mathbb{R}^2 \quad f \longmapsto (f(0), f(1))$ est continue.

b) [1 pt] On note A l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(0)f(1) < 0$.

Montrer que A est une partie ouverte de E.

c) [1 pt] La partie A est-elle dense dans E ? Justifier votre réponse.

3) On munit $E = \mathbb{R}[X]$ des normes

$$\|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N(P) = \max_{0\leq k\leq n} |a_k| \quad \text{où } P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

a) [1.5 pt] Montrer que les normes $\|\ \|$ et N ne sont pas équivalentes sur E.

b) [1.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}$. On note E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.

En utilisant la comparaison des normes, montrer que $\inf_{P\in E_n} \|P\| > 0$.

4) Soit un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ de dimension finie.

Soit K une partie de E non vide, compacte (= fermée bornée) et convexe. Soit $a \in E$.

On pose $m = \inf\{\|x - a\|,\ x \in K\}$ et Δ l'ensemble des $x \in K$ tels que $\|x - a\| = m$.

a) [1 pt] Montrer que Δ n'est pas vide.

b) [1.5 pt] Montrer que si x et $y \in \Delta$, alors $z = \dfrac{x + y}{2} \in \Delta$.

5) a) [2 pts] On pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n + 1)(2n + 2)}$. Montrer que $S = \int_0^1 \arctan(x)\ dx$.

b) [1 pt] En déduire que $S = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

6) Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $\boxed{R > 0}$.

a) [0.5 pt] On suppose que f n'est pas identiquement nulle.

Montrer (avec le cours) qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(x) \sim \lambda x^p$ en $x = 0$.

b) [1 pt] On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = 0$. Montrer que f est nulle, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$.

c) [1 pt] On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{k}{k+1}$. Déterminer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7) Soient u et $v \in \mathbb{C}$, avec $v \neq 0$. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = ua_{n+1} + va_n$$

On note λ et μ les racines complexes du polynôme $X^2 - uX - v$.

a) [1.5 pt] On note R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ Montrer que $R > 0$.

b) [1 pt] Donner une expression simple de $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$.

8) a) [1 pt] Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a. entière. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X = n)$ et $\forall t \in [0, 1]$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner sans justification une condition suffisante (sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) pour que G_X soit de classe C^k sur $[0, 1]$, et que la valeur de la dérivée k-ième de G_X soit obtenue en sommant les dérivées k-ième.

b) [1.5 pt] Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{N}$ suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = pq^n$.

Expliciter sans justification $G_X(t)$. En déduire brièvement (en fonction de p et q) les valeurs de $E(X)$ et $E(X^2)$.

Remarque : On ne demande pas de simplifier les expressions obtenues.

9) a) [0.5 pt] On pose $a_n = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^n}{\operatorname{ch} t}\, dt$. En minorant $\operatorname{ch} t$, montrer que $a_n \leq 2n!$

b) [2 pts] Montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos(tx)}{\operatorname{ch} t}\, dt$ est DSE en 0.

10) On pose $E = C^0([0, +\infty[, \mathbb{R})$ et on note E_0 le sev des fonctions de E qui sont DSE sur $[0, +\infty[$.

Autrement dit, $f \in E_0$ ssi il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour $f \in E$, on note F la fonction (appartenant à E) définie par

$$F(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt$$

a) [1 pt] ($\bigstar$) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $u : E_0 \to E_0 \quad f \longmapsto F$.

b) *Question supplémentaire.* Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $v : E \to E \quad f \longmapsto F$.