Interrogation n°14. Corrigé

1) Soit $x \in]-R, R[$. La série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ converge normalement sur le segment $[0, x]$.

Donc $\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n t^n\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Variante : On dérive terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ (cv normale de la série des dérivées sur $[0, x]$).

2) a) On a $\sup_{[-a,a]} |f_n| \leq \dfrac{2a}{n^2} = \dfrac{2a}{n^2}$, donc $\sum \sup_{[-a,a]} |f_n|$ converge.

b) On a $G(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)\right)$, où $g_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$.La série $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ cv car $\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$..

On a $g_n'(x) = f_n(x)$, donc $\sum g_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$, pour tout $a \geq 0$.

Donc $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est de classe C^1, donc il en est de même de G (composée de fonctions C^1).

3) a) Posons $f_n(x) = f(nx)$.

On a $f_n(x) \leq \int_{n-1}^n f(tx)\ dt$ et $\sum \int_{n-1}^n f(tx)\ dt$ converge, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge.

Soit $a > 0$. On a $\sup_{x \geq a} f_n = f_n(a)$, donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

De plus, les applications f_n sont continues. D'où la continuité de S sur $]0, +\infty[$..

b) On a $\int_0^{+\infty} f(tx)\ dt \leq S(x) \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f(tx)\ dt$, donc $\dfrac{J}{x} \leq S(x) \leq f(0) + \dfrac{J}{x}$. Donc $S(x) \sim \dfrac{J}{x}$.

Remarque : $\sum_{n=0}^{N} x f(nx)$ correspond à une somme de Riemann de pas x sur $[0, Nx]$.

4) Pour $x \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, donc par le CSSA, $f(x)$ existe.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x} = (-1)^{n-1} e^{-x \ln n}$. On a $f_n'(x) = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n^x}$.

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$, on a $m(x) \leq m(a)$, donc $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq m(a)}$ décroît vers 0.

Ainsi, $\sum f_n'(x)$ converge, et pour $n \geq \lceil m(a) \rceil$, $R_n(x) = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} f_n'(x)\right| \leq \dfrac{\ln n}{n^x} \leq \dfrac{\ln n}{n^a}$.

Ainsi, pour $n \geq \lceil m(a) \rceil$, $\sup_{[a,+\infty[} |R_n(x)| \leq \dfrac{\ln n}{n^a}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \sup_{[a,+\infty[} R_n(x) = 0$.

Donc la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

On en déduit que f est de classe C^1.

5) a) $\dfrac{R}{2}$; b) R ; c) $\sqrt{R}$; d) $\min(1, R^2)$.

Remarque : Pour d), comme les deux termes 1 et $|a_n|^2$ sont positifs, alors la rayon est précisement le minimum des rayons des deux séries $\sum z^n$ et $\sum |a_n|^2 z^n$.

6) a) On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, donc par le critère de d'Alembert, on a $R = 1$.

b) Comme $a_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, la série $\sum a_n$ diverge (par comparaison entre séries à termes positifs).

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, car $a_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^{n+1}\ dt \leq \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n\ dt = a_n$.

Comme de plus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, donc $\sum (-1)^n a_n$ converge, par le critère spécial des séries alternées.

c) On a $\forall t$, $|x \cos(t)| < 1$. On a $\dfrac{1}{1 - x\cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(t)^n$.

Il s'agit donc de prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} x^n \cos(t)^n\ dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(t)^n\ dt$.

Or, pour tout $x \in]-1, 1[$, la série de fonctions (en t) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(t)^n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

Donc on peut intégrer terme à terme : $\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(t)^n \, dt. = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} x^n \cos(t)^n \, dt.$

7) a) Considérons $0 < \rho < R$. Ainsi, $(|a_n| \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $\lambda = \dfrac{1}{\rho}$ covnient.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$. $\dfrac{|a_n|}{n!} |z|^n = O\left(\dfrac{\rho^n}{n!} |z|^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ converge. Donc $R' = +\infty$.

c) Pour $|z| < 1$, $z^{(n^2)} = O(\rho^n)$ pour tout ρ (et notamment $\rho < R$), donc la série converge.

Pour $|z| > 1$ et $\rho > R$, $|z|^{(n^2)} > \rho^n$ pour n assez grand, donc la série diverge. Donc $R'' = 1$.

8) a) On a $G_Z(t) = G_X(t)G_Y(t)$, donc (produit de Cauchy), $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

Preuve directe : $P(Z = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n-k) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n-k)$.

b) (i) X et Y suivent des lois de Poisson donc Z suit la loi de Poisson $P(\lambda+\mu)$.Donc $c_n = e^{-(\lambda+\mu)} \dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$.

(ii) X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(\frac{1}{2}, N)$, donc a même loi qu'une somme de N v.a. i.i.d. de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

De même pour Y. Donc Z a même loi qu'une somme de $(N + M)$ v.a. i.i.d. de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Donc $c_n = \frac{1}{2^{N+M}} \binom{N+M}{n}$.

(iii) On a $c_n = \frac{1}{(N+1)(M+1)} K_n$, où K_n est le nombre d'entiers k vérifiant $\begin{cases} 0 \le k \le N \\ 0 \le n-k \le M \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} 0 \le k \le N \\ n-M \le k \le n \end{cases}$

Donc $K_n = \min(N, n) - \max(0, n-M) + 1$.

Ainsi, $K_n = n + 1$ pour $n < \min(N, M)$, puis $K_n = \min(N, M) + 1$ pour $n \in [\![\min(N, M), \max(N, M)]\!]$.

Puis par symétrie par rapport à $\frac{1}{2}(N + M)$, $K_n = (N + M) - n + 1$ pour $\max(N, M) \le n \le N + M$.

Remarque : X et $N - X$ ont même loi, Y et $M - Y$ ont même loi, et $N - X$ et $M - Y$ sont indépendants, donc $X + Y$ et $(N + M) - (X + Y)$ ont même loi, d'où la symétrie par rapport à $\frac{1}{2}(N + M)$.

9) On a $c_n \le |a_n| + |b_n|$. Pour $|z| < \min(R_1, R_2)$, les deux séries $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$ converge.

Donc $\sum |c_n z^n|$ converge, et $R \ge \min(R_1, R_2)$.

On a $|a_n| \le c_n$. Pour $\rho > R_1$. Donc $\sum |a_n| \rho^n$ diverge. Donc $\sum c_n \rho^n$ diverge aussi. Donc $R \le R_1$.

De même, $R \le R_2$ car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jouent un rôle symétrique. Donc $R \le R_2$.

Donc $R = \min(R_1, R_2)$.

10) a) Comme $\dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!} = \dfrac{1}{2}(e-1) \le 1$, on montre par récurrence forte que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le 1$. Donc $R \ge 1$.

b) On considère le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et de $\sum \dfrac{1}{n!} z^n$. Donc pour $|z| < \min(+\infty, R) = R$,

$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)(1 + e^z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n + \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{k!} a_{n-k}\right) z^n = 2a_0 = 2.$

c) On a $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{i} \dfrac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2} + e^{ix/2}} = \dfrac{1}{i} \dfrac{e^{ix} - 1}{e^{ix} + 1} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{i} \dfrac{2}{e^{ix} + 1}$.

Donc $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \mathrm{Re}\left(-\dfrac{1}{i} \dfrac{2}{e^{ix} + 1}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{2}{1 + e^{ix}}\right)$.

Or, $\dfrac{2}{1 + e^{ix}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (ix)^n$. donc $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_{2k+1} x^{2k+1}$, car $-i^{2k+1} = (-1)^{k+1} i$.

Remarque culturelle : En fait, on peut montrer que le rayon du DSE de tan (obtenu ci-dessus) est $\dfrac{\pi}{2}$.