Interrogation n°14. *Barème sur 23 pts*

1) [1 pt] Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

En utilisant les théorèmes sur les séries de fonctions, montrer : $\forall x \in]-R, R[$, $\int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

2) a) [0.5 pt] On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2}$.

Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$, pour tout $a \geq 0$.

b) [2 pts] Montrer que $G(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est de classe C^1.

3) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, décroissante, continue et intégrable.

On pose $J = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$.

a) [1.5 pt] Montrer que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nx)$ est bien définie pour tout $x > 0$, et que S est continue sur $]0, +\infty[$.

b) [1 pt] Déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \to 0^+$, qu'on exprimera en fonction de J.

4) [2.5 pts] On vérifie (*admis*) que, pour $x > 0$, $\varphi : t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ décroît sur $[m(x), +\infty[$, où $m(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

5) [2 pts] Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Donner *sans justification* le rayon de cv (en fonction de R) de chacune des séries entières suivantes :

a) $\sum a_n (\ln n) 2^n z^n$; b) $\sum |a_n|\, z^n$; c) $\sum a_n n^2 z^{2n}$; d) $\sum (1 + |a_n|^2) z^n$

6) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n\ dt$. On admet que $a_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

a) [0.5 pt] Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, en justifiant votre réponse.

b) [1.5 pt] La série $\sum a_n x^n$ converge-t-elle lorsque $x = R$? lorsque $x = -R$?

c) [1.5 pt] Soit $x \in]-1, 1[$. Montrer avec soin que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{1}{1 - x\cos(t)}\ dt$.

7) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R vérifiant $0 < R < +\infty$.

a) [1 pt] Montrer qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ tel que $a_n = O(\lambda^n)$.

b) [0.5 pt] Déterminer le rayon R' de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{a_n}{n!} z^n$.

c) [0.5 pt] ($\bigstar$) Donner sans justification le rayon R'' de la série entière $\sum a_n z^{(n^2)}$.

8) Soient X et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ deux variables aléatoires entières *indépendantes*. On pose $\boxed{Z = X + Y}$.

On pose $\forall t \in [0,1]$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, $G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ et $G_Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$.

a) [0.5 pt] Exprimer *sans justification* c_n en fonction des a_k et des b_k.

b) [1.5 pt] Dans chacun des trois cas suivants, expliciter (sans calcul!) c_n.

(i) $a_n = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ et $b_n = e^{-\mu}\dfrac{\mu^n}{n!}$, où λ et μ sont deux réels strictement positifs

(ii) $a_n = \dfrac{1}{2^N}\binom{N}{n}$ et $b_n = \dfrac{1}{2^M}\binom{M}{n}$, où N et M sont des entiers fixés (ainsi, $\forall n > N$, $a_n = 0$ et $\forall n > M$, $b_n = 0$)

(iii) (★) $a_n = \dfrac{1}{N+1}$ si $0 \leq n \leq N$ et $a_n = 0$ si $n \geq N$; $b_n = \dfrac{1}{M+1}$ si $0 \leq n \leq M$ et $b_n = 0$ si $n \geq M$.

9) [1.5 pt] Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_1 et R_2.

On pose $c_n = \max(|a_n|, |b_n|)$. Déterminer le rayon R de convergence de $\sum c_n z^n$. Justifier votre réponse.

10) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$, et $\forall n \geq 1$, $a_n + \sum_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n-k}}{k!} = 0$, c'est-à-dire $a_n = -\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dfrac{a_{n-k}}{k!}$.

a) [1 pt] Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 1$. Que peut-on dire du rayon de convergence R de $\sum a_n z^n$?

b) [1 pt] Montrer que pour tout nombre complexe z tel que $|z| < R$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \dfrac{2}{1+e^z}$.

c) [1.5 pt] (★) En déduire que $\forall x \in \left]-R, R\right[$, $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_{2k+1} x^{2k+1}$.