Interrogation n°13. Corrigé

1) a) Posons $f_n(x) = \cos(nx)e^{-\sqrt{n}x}$. Soit $a > 0$. On a $\sup_{[0,a]} |f_n| \leq e^{-\sqrt{n}a} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. Comme les f_n sont continues, alors S est continue.

b) La convergence est uniforme (car normale) sur $[1, +\infty[$ qui est un voisinage de $+\infty$.

Par le théorème de la double limite, $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

2) a) $(Y(\omega) > n)$ ssi il existe $k \in [\![1, N]\!]$ tel que $(X_k(\omega) > n)$.

Donc $(Y > n) = \bigcup_{k=1}^{N}(X_k > n)$. Par sous-additivité, on a $P(Y \geq n) \leq NP(X \geq n) = Nq^n$.

b) On a $(Y \leq x) = \bigcap_{k=1}^{n}(X_k \leq x)$, donc par indépendance, $P(Y > x) = 1 - (1 - q^n)^N$.

3) a) On sait que $X + Y$ suit la,loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

b) Pour $0 \leq k \leq n$, $P(X = k \mid X + Y = n) = \dfrac{P(X = k, Y = n - k)}{P(X + Y = n)} = \dfrac{\lambda^k}{k!}\dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-(\lambda+\mu)}\dfrac{n!}{(\lambda+\mu)^n}e^{(\lambda+\mu)}$.

Donc $P(X = k \mid X + Y = n) = \binom{n}{k}\dfrac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n}$.

Il s'agit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $p = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$ (et $q = 1 - p = \dfrac{\mu}{\lambda + \mu}$).

4) a) On a $G_S(z) = G_X(z)G_Y(z)$ et $E(S) = E(X) + E(Y)$.

b) On a $P(T = n) = P(T = n \mid Z = 1)P(Z = 1) + P(T = n \mid Z = 0)P(Z = 0)$.

Donc $P(T = n) = pP(X = n) + qP(Y = n)$, où $q = 1 - p$.

On en déduit en sommant sur n que $G_T(z) = pG_X(z) + qG_Y(z)$ et $E(T) = pE(X) + qE(Y)$.

5) a) Par le th du transfert, on a $L(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-n\theta}$ (la série converge absolument, car $a_n \geq 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.
Posons $f_n(\theta) = a_n e^{-n\theta}$. Les f_n sont de classe C^∞ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_n^{(k)}(\theta) = (-1)^k n^k a_n e^{-n\theta}$.
Comme $a_n = O(\mu^n)$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^k a_n$ converge, donc $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
Donc L est de classe C^∞ et que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \geq 0$, $L^{(k)}(\theta) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^k a_n e^{-n\theta} = (-1)^k E(X^k e^{-\theta X})$.

b) Il résulte de a) que $L^{(k)}(0) = (-1)^k E(X^k)$. Or, par hypothèse, on a $L^{(k)}(0) = (-1)^k p^k$.
Donc $E(X) = p$ et $E(X^2) = p^2$, donc $V(X) = 0$. D'où X constante presque sûrement de valeur p.

6) a) La matrice de transition est $A = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 & 0 & p \\ p & 0 & q & \ddots & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & \ddots & p & & q \\ q & 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

b) On a $\left|p\omega^k + q\omega^{-k}\right| \leq p + q = 1$, avec égalité ssi $p\omega^k$ et $q\omega^{-k}$ sont colinéaires de même sens, c'est-à-dire ssi $\omega^{2k} = 1$, donc ssi $\omega^k = 1$ (car N étant impair, -1 n'est pas valeur propre de A).

Donc A admet $(n - 1)$ valeurs propres qui sont en module < 1.
Donc $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection sur la droite $E_1 = \mathbb{R}(1, 1, ..., 1)$.
Et il existe donc $Z_\infty = \lim_{n\to+\infty} Z_n = \lim_{n\to+\infty}(A^n Z_0)$ qui appartient donc à E_1.
Comme Z_∞ est une loi (comme limite de lois), alors $Z_\infty = (\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N})$.

c) $A = pJ + qJ^{-1}$. Considérons une base de diagonalisation de J. Elle diagonalise aussi J^{-1}.
Donc A est diagonalisable de valeurs propres $p\omega^k + q\omega^{-k}$.

7) a) Notons p_k le paramètre de X_k. Alors $V(X_k) = p_k(1 - p_k) \leq p_k = E(X_k)$.

Comme les v.a. sont indépendantes, $V(Y) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$. Donc $V(Y) \leq \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = E(Y)$.

b) Comme $P(t) > 0$ pour tout $t > 0$, alors les racines de P sont ≤ 0. On les note $-\alpha_k$, avec $\alpha_k \geq 0$.

On a $P_n(t) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{t+\alpha_k}{1+\alpha_k} = \prod_{k=1}^{n} (q_k t + p_k)$, où $p_k = \dfrac{\alpha_k}{1+\alpha_k}$ et $q_k = 1 - p_k = \dfrac{1}{1+\alpha_k}$.

Il suffit donc de considérer pour Y une somme de Bernoulli $\sum_{k=1}^{n} X_k$, où X_k suit la loi $\mathcal{B}(p_k)$.

Remarque : On admet ici qu'il existe des variables de Bernoulli indépendantes de paramètres donnés.

c) On a $V(Y_n) = P_n''(1) + P_n'(1) - P_n'(1)^2 \leq E(Y_n) = P_n'(1)$, donc $P_n''(1) \leq P_n'(1)^2$.

d) Avec $P(t) = \lambda \prod_{k=1}^{n} (t+\alpha_k)$, on a $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{t+\alpha_k}$, donc $\left(\dfrac{P'}{P}\right)'(t) = -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(t+\alpha_k)^2} \leq 0$.

Or, $\left(\dfrac{P'}{P}\right)'(1) = \dfrac{P''(1)P(1) - P'(1)^2}{P'(1)^2}$, donc on retrouve bien $P_n''(1) \leq P_n'(1)^2$ puisque $P_n(1) = 1$.

8) a) S_n suit une loi de Poisson de paramètre λn.

Donc $E(e^{tS_n}) = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{kt} = e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda e^t)^k}{k!} = e^{-n\lambda} e^{n\lambda e^t} = e^{n\lambda(e^t - 1)}$.

Remarque : On pourrait aussi calculer $E(e^{tX})$ et utiliser $E(e^{tS_n}) = E(e^{tX})^n$, car les e^{tX_k} sont i.i.d.

b) $\lambda(e^t - 1 - t) = O(t^2)$, donc $\varphi(t) \sim -\varepsilon t$ en $t = 0$. Il suffit donc de prendre t assez petit.

c) Par Markov appliqué à e^{tS_n} qui est positive, on a :

$\forall t > 0$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geq \lambda + \varepsilon\right) = P(e^{tS_n} \geq e^{t(\lambda+\varepsilon)}) \leq \dfrac{E(e^{tS_n})}{e^{t(\lambda+\varepsilon)}} = e^{n\varphi(t)}$, où $\varphi(t)$ est définie au b).

On peut donc trouver $t > 0$ tel que $\varphi(t) < 0$. Donc $K = \varphi(t)$ convient.

d) *Preuve de la propriété admise* : Pour tout $t < 0$, on a :

$\forall t > 0$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} \leq \lambda - \varepsilon\right) = P(e^{tS_n} \geq e^{nt(\lambda-\varepsilon)}) \leq \dfrac{E(e^{tS_n})}{e^{nt(\lambda-\varepsilon)}} = e^{n\psi(t)}$, où $\psi(t) = \lambda(e^t - 1 - t) + \varepsilon t$.

Comme $\psi(t) \sim -\varepsilon t$ en $t = 0$, alors pour $|t|$ assez petit et $t < 0$, on a $\psi(t) > 0$.

En prenant un tel t, on obtient donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} \leq \lambda - \varepsilon\right) \leq e^{K'n}$, avec $K' = \psi(t)$.

Ainsi, avec $L = \min(K, K') > 0$, on obtient $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-Ln}$.

Preuve de d) : Avec k fixé, $P\left(\bigcup_{n \geq m} \overline{A_{k,n}}\right) \leq \sum_{n=m}^{+\infty} P(\overline{A_{k,n}}) \leq \sum_{n=m}^{+\infty} 2e^{-Ln} = \dfrac{2e^{-Lm}}{1 - e^{-L}} \to 0$.

(*Remarque* : L dépend de $\varepsilon = \frac{1}{k}$, donc de k, mais ici k est fixé).

Par continuité décroissante, $P(B_k) = \lim_{m \to +\infty} P\left(\bigcup_{n \geq m} \overline{A_{k,n}}\right) = 0$.

Ainsi, $P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \overline{B_k}\right) = 1$ comme intersection dénombrable d'événements presque sûrs.

Donc presque sûrement, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq m$, $\left|\dfrac{S_n}{n} - \lambda\right| < \dfrac{1}{k}$.

D'où, presque sûrement, $\forall \alpha > 0$, $\exists\, m \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq m$, $\left|\dfrac{S_n}{n} - \lambda\right| \leq \alpha$, c'est-à-dire $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n} = \lambda$.

9) Soit $\alpha > 0$. Par Stone-Weierstrass, il existe un polynôme Q tel que $\|f' - Q\|_\infty \leq \alpha$.

On considère $P(x) = f(a) + \int_a^x Q(t)\, dt$. Alors $f(x) - P(x) = \int_a^x (f' - Q)(t)\, dt$, donc $\|f - P\|_\infty \leq \Delta\alpha$, où $\Delta = b - a$.

Ainsi, $\|f - P\|_\infty + \|f' - P'\|_\infty \leq (1+\Delta)\alpha$. On conclut en prenant $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{(1+\Delta)}$.