Interrogation n°13. *Barème sur 23.5 pts*

1) [2 pts] On considère $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nx)\exp(-\sqrt{n}x)$.

a) Montrer que S est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

2) [2 pts] Soit $X_1, ..., X_N$ des v.a. réelles (non nécessairement indépendantes) de même loi que X.

On suppose que X suit une loi gémétrique (à valeurs dans $\mathbb{N}^*$) de paramètre p. On pose $Y = \max(X_1, ..., X_N)$.

a) On pose $q = 1 - p$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(Y > n) \leq Nq^n$.

b) On suppose $X_1, ..., X_n$ mutuellement indépendantes. Exprimer $P(Y > n)$ en fonction de q, n et N.

3) [2 pts] Soient X et Y des v.a. indépendantes qui suivent des lois de Poisson.

On suppose $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, avec λ et $\mu > 0$.

a) Préciser sans justification la loi de $X + Y$.

b) On pose $p = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$. Montrer que la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

4) Soient X et Y deux variables aléatoires entières indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère de plus une variable Z indépendante de (X, Y) et qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

On note $G_X(z)$ et $G_Y(z)$ les séries génératrices respectives de X et Y. On pose $q = 1 - p$.

a) [0.5 pt] On considère $S = X + Y$. Expliciter sans justification $G_S(z)$ et $E(S)$ en fonction de X et Y.

b) [2 pts] On considère la variable $T = \begin{cases} X \text{ si } Z = 1 \\ Y \text{ si } Z = 0 \end{cases}$. Expliciter $P(T = n)$ en justifiant votre réponse.

En déduire sans justification la série génératrice de T et l'espérance $E(T)$ en fonction de X, Y et p.

5) Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une variable aléatoire à valeurs entières. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(X = n)$.

On suppose qu'il existe un réel positif $\mu \in [0, 1[$ tel que $a_n = O(\mu^n)$ lorsque $n \to +\infty$.

On pose $\forall \theta \in [0, +\infty[$, $L(\theta) = E(e^{-\theta X})$.

a) [2 pts] Montrer que $L : \theta \longmapsto E(e^{-\theta X})$ est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$, et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \theta \in [0, +\infty[, \; L^{(k)}(\theta) = (-1)^k E(X^k e^{-\theta X})$$

b) [1 pt] Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $\forall \theta \in [0, +\infty[$, $L(\theta) = e^{-p\theta}$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $E(X^k) = p^k$, et en déduire (avec $k \in \{1, 2\}$) que X est constante presque sûrement.

6) *Marche aléatoire sur un polygone à N côtés, où* $\boxed{N \text{ est impair}}$. Soit $0 < p < 1$.

On note $U_n = \{1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{N-1}\}$ l'ensemble des racines N-ième de l'unité, avec $\omega = e^{2i\pi/N}$.

On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans U_n.

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(X_{n+1} = \omega^k \mid X_n = \omega^{k-1}) = p$ et $P(X_{n+1} = \omega^k \mid X_n = \omega^{k+1}) = q = 1 - p$.

On pose $Z_n = P(X_n = \omega^k)_{0\leq k<N}$.

a) [1 pt] Expliciter sans justification une matrice $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ telle que $Z_n = A^n Z_0$.

b) [2 pts] On *admet* que A est diagonalisable et que les valeurs propres de A sont les $p\omega^k + q\omega^{-k}$, avec $0 \leq k < N$.

Expliquer brièvement comment on peut en déduire que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = \omega^k) = \dfrac{1}{N}$.

c) [1 pt] (★) On considère la matrice de permutation cyclique $J = (E_2, E_3, ..., E_{N-1}, E_1)$.

On sait que le polynôme caractéristique de J est $\chi_J(x) = x^N - 1$. Justifier la propriété sur A admise au b).

7) On dit qu'une v.a. $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ est une somme de Bernoulli ssi il existe une famille $(X_1, ..., X_n)$ de variables de Bernoulli *indépendantes* telle que Y_n a même loi que $X_1 + ... + X_n$.

Remarque : Les v.a. de Bernoulli $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes mais n'ont pas a priori même loi.

a) [1 pt] On pose $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que $V(Y_n) \leq E(Y_n)$.

b) [2 pts] Soit $P_n(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ un polynôme réel $\boxed{\text{à coefficients positifs}}$ et vérifiant $\boxed{P(1) = 1}$.

On suppose $\boxed{P_n \text{ scindé sur } \mathbb{R}}$.

Montrer qu'il existe une variable aléatoire Y_n somme de Bernoulli telle que $\forall t \in [0, 1]$, $G_{Y_n}(t) = P_n(t)$.

c) [0.5 pt] Déduire de a) et b) que $P_n''(1) \leq P_n'(1)^2$.

d) *Question supplémentaire.* Proposer une autre preuve en montrant d'abord que $\left(\dfrac{P'}{P}\right)' \leq 0$.

8) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. de Poisson i.i.d. de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) [1 pt] Montrer que $E(e^{tS_n}) = e^{n\lambda(e^t-1)}$.

b) [0.5 pt] Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\varphi(t) = \lambda(e^t - 1 - t) - \varepsilon t$. Montrer qu'il existe $t > 0$ tel que $\varphi(t) < 0$.

c) [1 pt] En déduire qu'il existe $K > 0$ indépendant de n tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geq \lambda + \varepsilon\right) \leq e^{-Kn}$.

d) [1 pt] (★) On montre de même (*admis ici*) qu'il existe $L > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-Ln}$.

On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ les événements $A_{k,n}$: $\left|\dfrac{S_n}{n} - \lambda\right| < \dfrac{1}{k}$.

Montrer que $B_k = \displaystyle\bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} \left(\bigcup_{n\geq m} \overline{A_{k,n}}\right)$ est négligeable. En déduire (avec $\overline{B_k}$) que presque sûrement, $\dfrac{S_n}{n} \to \lambda$.

9) [1 pt] (★) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1. Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\|f - P\|_\infty + \|f' - P'\|_\infty \leq \varepsilon$, où $\|g\|_\infty = \sup_{[a,b]} |g|$.

On rappelle le th de Stone-Weierstrass : toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes.