Interrogation n°12. Corrigé

1) a) $P(X=n \mid N=m) = P(\sum_{i=1}^m Z_i = n \mid N=m) = P(\sum_{i=1}^m Z_i = n)$, car N indépendant des Z_i.

Comme les Z_i sont indépendantes, la loi de $\sum_{i=1}^m Z_i$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$.

Donc $P(X=n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m}{n} p^n q^{m-n} a_m$.

b) Pour Y, il suffit de permuter les rôles de p et q. Donc $P(Y=n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m}{n} q^n p^{m-n} a_m$.

2) a) Comme Y et $-Y$ ont même loi, alors $f(Y)$ et $f(-Y)$ ont même loi.

Comme f est impaire, $f(-Y) = -f(Y)$. Donc Donc $E(f(Y)) = E(-f(Y)) = -E(f(Y))$. D'où $E(f(Y)) = 0$.

b) On a $\operatorname{ch}(X+Y) = (\operatorname{ch} X)(\operatorname{ch} Y) + (\operatorname{sh} X)(\operatorname{sh} Y)$.

Comme X et Y sont indépendantes, $\operatorname{ch} X$ et $\operatorname{ch} Y$ sont indépendantes. De même pour $\operatorname{sh} X$ et $\operatorname{sh} Y$.

Donc $E(\operatorname{ch}(X+Y)) = E(\operatorname{ch} X)E(\operatorname{ch} Y) + E(\operatorname{sh} X)E(\operatorname{sh} Y)$.

Par a) appliqué à la fonction impaire sh, on a $E(\operatorname{sh} X) = 0$. D'où le résultat.

3) a) $E(Z) = p - q = 2p - 1$ et $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = 1 - \mu^2$.

b) $\mu_n = n\mu$ et $V(S_n) = nV(Z) = n(1-\mu^2)$.

c) On a $\mu = 2p - 1 > 0$, donc $\mu_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$(S_n \leq 0) \subset P(|S_n - \mu_n| \geq \mu_n)$ et par Bienaymé-Tchebychev, $P(|S_n - \mu_n| \geq \mu_n) \leq \dfrac{V(S_n)}{\mu_n^2}$.

Donc $P(S_n \leq 0) \leq \dfrac{1-\mu^2}{n\mu^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, donc $\lim_{n\to+\infty} P(S_n > 0) = 1$.

d) Lorsque $p = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$ et $V(Z) = 1$. Donc $P(|S_n| \geq K\sqrt{n}) \leq \dfrac{V(S_n)}{K^2 n} = \dfrac{1}{K^2}$.

e) $(-S_n) = \sum_{k=1}^n (-Z_k)$. Comme Z et $-Z$ ont même loi, et que les v.a. $(-\mu z_k)$ sont elles aussi indépendantes, alors S_n et $-S_n$ ont même loi.

f) $\exp(tS_n) = \exp(tZ_1)...\exp(tZ_n)$.

Comme les $\exp(tZ_k)$ sont indépendantes, $E(e^{tS_n}) = E(e^{tZ})^n = (\operatorname{ch} t)^n$, car $E(Z) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$.

g) Pour $t > 0$, $s \longmapsto \exp(st)$ est strictement croissante, donc $(S_n \geq K\sqrt{n}) = (e^{tS_n} \geq e^{tK\sqrt{n}})$.

Par Markov appliquée à $e^{tS_n} \geq 0$, on obtient : $P(S_n \geq K\sqrt{n}) = P(e^{tS_n} \geq e^{tK\sqrt{n}}) \leq \dfrac{E(e^{tS_n})}{e^{tK\sqrt{n}}} \leq \dfrac{e^{nt^2/2}}{e^{tK\sqrt{n}}}$.

h) Par symétrie de la loi de S_n, on obtient $P(|S_n| \geq K\sqrt{n}) = 2P(S_n \geq K\sqrt{n})$.

On choisit ensuite $t = \frac{K}{n}$ de sorte à minimiser $\frac{1}{2}nt^2 - K\sqrt{n}$, ce qui donne le résultat souhaité.

4) a) $X_n X_{n+1}$ et $X_m X_{m+1}$ sont indépendantes dès qu'elles portent sur 4 v.a. distinctes, donc lorsque $m > n+1$.

On a donc $\operatorname{Cov}(Y_n, Y_m) = 0$ pour tout $m > n+1$.

On a $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) = E(X_n X_{n+1}^2 X_{n+2}) - E(X_n X_{n+1})E(X_{n+1}X_{n+2}) = E(X^2)E(X)^2 - E(X^2)^2 = E(X^2)V(X)$.

Enfin, $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_n) = V(Y_n) = E(X^2)^2 - E(X)^4$.

b) On a $E(T_n) = \sum_{k=1}^n E(Y_k) = nE(X)^2$.

Donc $V(T_n) = \sum_{k=1}^n V(Y_k) + 2\sum_{j<k} \mathrm{Cov}(Y_j, Y_k) = \sum_{k=1}^n V(Y_k) + 2\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = O(n) + O(n) = O(n)$.

5) a) $P(f(x) = y) = \dfrac{n^{n-1}}{n^n} = \dfrac{1}{n}$.

b) $N_y = \sum_{x\in\Delta} 1_{A_x}$, où 1_{A_x} est la fonction caratéristique de l'événement $A_x : f(x) = y$.

Comme les Z_x sont indépendantes, alors N_y est la somme de n variables indépendantes de loi $\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Ce qui permet de conclure que N_y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{n}\right)$.

c) On a $X = \sum_{y\in\Delta} 1_{B_y}$, où $B_y : N_y \geq 2$.

Par b), $P(B_y) = 1 - P(N_y = 0) - P(N_y = 1) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n - \binom{n}{1}\dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

Par linératié de l'espérance, on a donc $E(X) = n\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}\right)$.

Remarque : Exo inspiré d'un oral de l'X où on demande de prouver que $E(X) \sim_{+\infty} n\left(1 - 2e^{-1}\right)$.

6) Par Markov, $P(|X_n - \lambda| \geq \varepsilon) = P((X_n - \lambda)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \dfrac{E((X_n - \lambda)^2)}{\varepsilon^2}$.

Or, $X_n - \lambda = X_n - E(X_n) + E(X_n) - \lambda$, donc par Pythagore, $E((X_n - \lambda)^2) = V(X_n) + (E(X_n) - \lambda)^2$.

Par pincement, on en conclut $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - \lambda| \geq \varepsilon) = 0$.

7) a) $Y^2 = \sum_{k=1}^n Z_k^2 \|x_k\|^2 + 2\sum_{j<k} Z_j Z_k \langle x_j, x_k\rangle$.

Or, $E(Z_k^2) = E(1) = 1$ et $E(Z_j Z_k) = 0$ si $j < k$. Donc $E(Y^2) = n$.

b) Supposons par l'absurde $\forall(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, $\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\| > \sqrt{n}$.

Avec les notations de a), on a $Y^2 > n$, donc a fortiori, $E(Y^2) > n$, ce qui contredit a).

8) a) $\lim_{n\to+\infty} pR_p = 0$ car $pR_p \leq \sum_{k=p}^{+\infty} ka_k$ reste de la série $E(X) = \sum_{k=p+1}^{+\infty} ka_k$.

b) On a toujours $\mathrm{card}\, Z_n \leq n$.

Posons $\Delta_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$ et $\overline{\Delta_p} = \mathbb{N} \setminus \Delta_p$. On a $Z_n = \mathrm{card}(Z_n \cap \Delta_p) + \mathrm{card}(Z_n \cap \overline{\Delta_p})$.

D'une part, on a : $\mathrm{card}(Z_n \cap \Delta_p) \leq \mathrm{card}(\Delta_p) = p$. D'autre part, on a : $\mathrm{card}(Z_n \cap \overline{\Delta_p}) \leq \sum_{k=1}^n 1_{X_k \geq p}$.

Donc $E(Z_n) \leq \mathrm{card}(\Delta_p) + nP(X \geq p) = p + nR_p$.

c) En prenant $p = \sqrt{n}$ et sachant que $R_p = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{p}\right)$, on obtient bien $E(Z_n) = O(\sqrt{n})$.