Interrogation n°12. Corrigé

1) On applique la formule des probas totales à la loi conditionnelle $P_C(A) = (A \mid C)$.

On obtient donc $P_C(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_C(A \mid B_n) P_C(B_n)$.

Or, $P_C(A \mid B_n) = \dfrac{P_C(A \cap B_n)}{P_C(B_n)} = \dfrac{P(A \cap B_n \mid C)}{P(B_n \mid C)} = \dfrac{P(A \cap B_n \cap C)}{P(B_n \cap C)} = P(A \mid B_n \cap C)$.

2) On a $|X| = 1_{X\neq 0}\ |X|$, donc par Cauchy-Schwarz, $E(|X|)^2 \leq E(1_{X\neq 0}) E(|X|^2) = P(X \neq 0) E(X^2)$.

3) XY est de la forme $f(X,Y)$. Donc XY et Z sont indépendantes, et ainsi $\mathrm{Cov}(XY, Z) = 0$.

$\mathrm{Cov}(XY, XZ) = E(X^2YZ) - E(XY)E(YZ) = E(X^2)E(Y)E(Z) - E(X)^2E(Y)E(Z) = E(X^2)E(X)^2 - E(X)^4$.

4) a) Le tirage consiste à choisir une partie de cardinal n parmi $2n$.

Il y a donc $\binom{2n}{n}$ configurations possibles et $\binom{2n-2}{n-2}$ parmi elles contiennent la paire numéro 1.

La probabilité est donc $p = \dfrac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{n(n-1)}{2n(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

b) On écrit $N = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}$, où A_i est l'événement : La i-ième paire au complet a été tirée.

Avec les notations du a), on a $P(A_i) = p$ (indépendant de i).

Par linéarité de l'espérance, $E(N) = np = \dfrac{n(n-1)}{2(2n-1)}$.

Remarque : Les événements A_i ne sont pas indépendants !

5) a) On a $\forall x \in \mathbb{N}$, $(X = x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (S_n = x,\ N = n)$.

Donc les $(X = x)$ sont des événements comme réunions dénombrables d'événements.

Remarque : Valable même si les Z_i sont à valeurs réelles : dans tous les cas, $\mathrm{Im}\, X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Im}\, S_n$, donc X prend un nombre au plus dénombrable de valeurs.

b) $\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \dfrac{q^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!} \times \dfrac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Avec $m = n - k$, on a donc $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \dfrac{p^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{+\infty} \dfrac{q^m \lambda^m}{m!} = \dfrac{p^k}{k!} e^{-\lambda} e^{q\lambda} = \dfrac{(p\lambda)^k}{n!} e^{-p\lambda}$.

c) On a $X \leq N$, donc $P(X = k \mid N = n) = 0$ si $n < k$.

Par la formule des probas totales, on a donc : $P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k \mid N = n) P(N = n)$.

On a $P(X = k \mid N = n) = P(Z_1 + ... + Z_n = k \mid X = n)$.

Comme N est indépendante des Z_i, on a : $P(X = k \mid N = n) = P(Z_1 + ... + Z_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

En effet, $Z_1 + ... + Z_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Donc $P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \dfrac{(p\lambda)^k}{n!} e^{-p\lambda}$ par a). Ainsi, X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$.

d) On a $Y = \sum_{i=1}^{N} \overline{Z_i}$, où $\overline{Z_i} = 1 - Z_i$. Les $\overline{Z_i}$ sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{B}(q)$.

Les $\overline{Z_i}$ sont aussi indépendantes de N. Donc par b), Y suit la loi $\mathcal{P}(\lambda q)$.

e) On a $P(X = n, Y = m) = P(X = n, N = n + m) = \binom{n+m}{n} p^n q^m \dfrac{\lambda^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda} = \dfrac{(p\lambda)^n}{n!} e^{-p\lambda} \dfrac{(q\lambda)^m}{m!} e^{-q\lambda}$.

On a donc bien $P(X = n, Y = m) = P(X = n) P(Y = m)$.

Remarque : X et $Y = N - X$ sont indépendantes, mais X et N ne le sont pas !

Si on prend une autre loi pour N qu'une loi de Poisson, X et Y ne sont plus indépendantes.

6) a) Il s'agit de la loi d'une somme $S = X_1 + ... + X_n$ de n variables aléatoires X_k de loi uniforme sur $\{0, 1, 2\}$.

c) Par Bienaymé-Chebychev, $1 - q = P(|S - n| \geq \varepsilon n) \leq \dfrac{V(S)}{(\varepsilon n)^2} = \dfrac{2}{3n\varepsilon^2}$.

7) On a $P(X > Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n \mid Y = n)P(Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)P(Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R_n$.

D'autre part, comme X et Y jouent un rôle symétrique, on a $P(X > Y) = P(Y > X)$.

Or,$P(X > Y) + P(Y > X) + P(X = Y) = 1$, donc $P(X > Y) = \frac{1}{2}(1 - P(X = Y))$.

Or, $P(X = Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ car X et Y sont indépendantes.

Donc $P(X > Y) = \dfrac{1}{2}(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2)$.

8) a) $E(S_n) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n+1} \sim_{+\infty} \ln n$ par comparaison entre sommes et intégrales.

On a $V(S_n) \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... + \dfrac{1}{n+1}$, donc $V(S_n) = O_{+\infty}(\ln n)$.

b) On pose $\varepsilon = \min(a - 1, b - 1)$. Ainsi, $P\left(a < \dfrac{S_n}{\mu_n} < b\right) \geq P\left(\left|\dfrac{S_n}{\mu_n} - 1\right| < \varepsilon\right)$.

Or, par Bienaymé-Tchebychev, $P\left(\left|\dfrac{S_n}{\mu_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{V(S_n)}{\varepsilon^2 \mu_n^2} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right) \to 0$. D'où le résultat..

c) On a $P(N > n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right) = \dfrac{1}{n+1}$.
Par continuité décroissante, $P(N < +\infty) = \lim_{n \to +\infty} P(N > n) = 0$, Donc $P(N < +\infty) = 1$.

Comme $\sum \dfrac{1}{n+1}$ diverge, alors N est d'espérance finie.

9) a) On a $Z^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j X_i Y_i X_j Y_j$.

Les v.a. $Y_i Y_j$ sont d'espérances finies ($\in L_1$) comme produits de deux v.a. de moment d'ordre 2 fini ($\in L^2$).

Pour $i \neq j$, comme les v.a. X_i, X_j et $Y_i Y_j$ sont indépendantes, alors $X_i Y_i X_j Y_j$ est d'espérance finie et

$$E(X_i Y_i X_j Y_j) = E(X_i)E(Y_i X_j Y_j) = 0.$$

Comme X_i et Y_i sont indépendants, alors $E((X_i Y_i)^2) = E(X_i)^2 E(Y_i)^2 = E(X^2)E(Y^2)$.

Donc Z^2 est d'espérance finie comme somme de v.a. d'espérance finie et $E(Z^2) = nE(X^2)E(Y^2)$.

Remarque : Si on sait que L^2 est un espace vectoriel, on peut aussi justifier que $Z \in L^2$ en montrant que les $X_i Y_i$ sont L^2 ce qui résulte de $(X_i Y_i)^2 = (X_i)^2 (Y_i)^2 \in L^1$ comme produit de deux v.a. indépendantes $\in L^1$.

b) On a $D_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} X_{i1} Y_i$, avec $Y_i \sim D_{n-1}$.

Les X_{i1} sont bien indépendants les uns des autres et des Y_i.

Remarque : en revanche, les Y_i ne sont pas indépendantes en général, sauf lorsque $n = 2$.

Par a), $E(D_n^2) = \sum_{i=1}^{n} E((X_{i1})^2)E(D_{n-1}^2)$, d'où $E(D_n^2) = nE(D_{n-1}^2)$. Comme $D_0 = 1$, alors $E(D_n^2) = n!$

10) a) $P(XY = x) = \frac{1}{2}P(X = x \mid Y = 1) + \frac{1}{2}P(X = -x \mid Y = -1) = \frac{1}{2}P(X = x) + \frac{1}{2}P(X = -x) = P(X = x)$.

Donc XY suit la même loi que x. Il en est de même pour XZ.

b) Lorsque XY vaut x, XZ vaut x ou $-x$. On fixe x et $y \in \{-1, 1\}$ et on pose $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $y = \varepsilon x$.

On a $P(XY = x, XZ = y) = P(XY = x, YZ = \varepsilon) = \frac{1}{2}P(X = x, Z = \varepsilon \mid Y = 1) + \frac{1}{2}P(X = -x, Z = -\varepsilon \mid Y = -1)$
Donc $P(XY = x, XZ = y) = \frac{1}{2}P(X = x, Z = \varepsilon) + \frac{1}{2}P(X = -x, Z = -\varepsilon) = \frac{1}{4}P(X = x) + \frac{1}{4}P(X = -x)$.

On obtient donc bien $P(XY = x, XZ = \varepsilon x) = \frac{1}{2}P(X = x) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(XY = x)P(XZ = y)$.