Interrogation n°12. *Barème sur 23.5 pts*

1) *Cas particulier de la formule de Wald* (non supposée connue)

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes N, Z_1, ... ,Z_n, ... définies sur le même espace probabilisé. On suppose que N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie, et que les variables aléatoires Z_n suivent la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\overline{Z_n} = 1 - Z_n$ et $q = 1 - p$.

On note X la variable aléatoire définie par $\boxed{X = \sum_{i=1}^{N} Z_i}$ et $Y = N - X = \sum_{i=1}^{N} \overline{Z_i}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = P(N = n)$ et $G_N(t) = E(t^N) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

a) [2 pts] Montrer que $P(X = n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{m}{n} p^n q^{m-n} a_m$.

On détaillera *avec précision* le calcul de sorte à mettre en évidence le rôle de l'indépendance des v.a.

b) [0.5 pt] En déduire sans justification une expression de $P(Y = n)$.

2) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles **indépendantes** et à valeurs bornées.

On suppose de plus que la loi de Y est **symétrique**, c'est-à-dire Y et $-Y$ ont même loi.

a) [1 pt] Montrer que pour toute fonction impaire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $E(f(Y)) = 0$.

b) [1.5 pt] Montrer que $E(\operatorname{ch}(X + Y)) = E(\operatorname{ch} X)E(\operatorname{ch} Y)$.

3) *Marches aléatoires.* Soit un réel $p \in]0, 1[$.

a) [0.5 pt] On considère une v.a. Z telle que $\boxed{P(Z = 1) = p \text{ et } P(Z = -1) = q = 1 - p}$.

Exprimer $\mu = E(Z)$ en fonction de p et exprimer $V(Z)$ en fonction de μ.

b) [1 pt] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k}$, où les Z_k sont des v.a. indépendantes et de même loi que Z.

Exprimer sans justification $\mu_n = E(S_n)$ et $V(S_n)$ en fonction de μ.

c) [1.5 pt] On suppose $\boxed{p > \frac{1}{2}}$, donc $\mu > 0$. En utilisant Bienaymé-Tchebychev, montrer : $\lim_{n\to+\infty} P(S_n > 0) = 1$.

On suppose désormais $\boxed{p = \frac{1}{2}}$.

d) [0.5 pt] Montrer que $P(|S_n| \geq K\sqrt{n}) \leq \dfrac{1}{K^2}$.

e) [0.5 pt] En considérant Z_k et $-Z_k$, justifier brièvement que S_n et $-S_n$ ont même loi.

f) [1 pt] Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $E(e^{tS_n}) = (\operatorname{ch} t)^n$.

On *admet* pour la suite que $\operatorname{ch} t \leq \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right)$.

g) [1 pt] En déduire que $\forall t > 0$, $P(S_n \geq K\sqrt{n}) \leq \exp\left(\frac{1}{2}nt^2 - tK\sqrt{n}\right)$.

h) [0.5 pt] En conclure $P(|S_n| \geq K\sqrt{n}) \leq 2\exp\left(-\frac{1}{2}K^2\right)$.

4) Soit X une v.a. réelle de moment d'ordre 2 fini.

On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes et de même loi que X.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $\boxed{Y_n = X_n X_{n+1}}$.

a) [1.5 pt] Soient n et $m \in \mathbb{N}$. Pour $m \geq n$, exprimer $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_m)$ en fonction de $E(X)$, $E(X^2)$ et $V(X)$.

Indication : On distinguera les cas $m = n$, $m = n+1$ et $m > n+1$.

b) [1.5 pt] On pose $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Montrer que $E(T_n)$ et $V(T_n)$ sont en $O(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Ω l'ensemble des fonctions f de $\Delta = [\![1, n]\!]$ dans lui-même.

On munit Ω de la loi uniforme.

a) [0.5 pt] Pour $(x, y) \in \Delta$, donner sans justification la valeur de $P(f(x) = y)$.

b) [1.5 pt] Soit $y \in \Delta$. Pour $f \in \Omega$, on note $N_y(f)$ le nombre $N_y(f)$ d'antécédents de y par f.

Justifier brièvement que la variable de comptage N_y suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{n}\right)$.

c) [1.5 pt] Pour $f \in \Omega$, on note $X(f)$ le nombre d'éléments de Δ admettant *au moins* 2 antécédents par f.

En utilisant b), montrer que $E(X) = n\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}\right)$.

6) [1.5 pt] Soit une suite de v.a.r. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et un réel λ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \lambda \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant Markov, montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(|X_n - \lambda| \geq \varepsilon) = 0$.

7) Soient $x_1, ..., x_n$ des vecteurs **unitaires** d'un espace euclidien E muni du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

a) [1 pt] Soient $Z_1, ..., Z_n : \Omega \to \{-1, 1\}$ des variables aléatoires de Rademacher **indépendantes**.

On considère la variable aléatoire réelle $Y = \|\sum_{k=1}^n Z_k x_k\|$. Déterminer $E(Y^2)$.

b) [1 pt] En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k\| \leq \sqrt{n}$.

8) Soit $X : \Omega \to \mathbb{N}$ une v.a. à valeurs entières d'espérance finie. On pose $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k = P(X = k)$.

a) [1 pt] On pose $R_p = P(X \geq p)$. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} pR_p = 0$.

b) [1.5 pt] ($\bigstar$) On considère une suite de v.a. indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de même loi que X

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = \mathrm{card}\{X_1, ..., X_n\}$ qui est donc une v.a. à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

Montrer avec soin que $E(Z_n) \leq p + nR_p$.

c) *Question supplémentaire* : En déduire que $E(Z_n) = O(\sqrt{n})$ lorsque $n \to +\infty$.