Interrogation n°11. Corrigé

1) On a $A = U^{-1}SU = U^TSU$, donc $A^T = U^TS^TU = U^TSU$.

Variante : L'endomorphisme canoniquement associé à A est symétrique car dans la BON définie par U, sa matrice est symétrique. Donc A est symétrique (matrice de u dans la base canonique qui est une BON).

2) Le polynôme annulateur $X^3 - X$ admet 0, 1 et -1 comme racines.

Ainsi, A est symétrique donc orthodiagonalisable, et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, 1, -1\}$.

Donc $A = U^TDU$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale par blocs de blocs O, I_p et $-I_q$.

Réicproquement, ces matrices sont symétriques (par 1)) et $A^3 = A$ car $D^3 = D$ et A semblable à D.

3) Par le th spectral, il existe une BON $(e_1, ..., e_n)$ composée de vecteur de u vérifiant $u(e_j) = \lambda_j e_j$.

Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a $\langle x, u(x)\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Avec $x = \sum_{i=1}^n e_i$, on a bien $\langle x, u(x)\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

4) a) On a $(X \mid A^TAX) = \|AX\|^2$.

Par le cours (Haüsdorffien), on a $\sup_{X\neq 0} \dfrac{(X \mid A^TAX)}{\|X\|^2} = \lambda$. Donc $N(A)^2 = \lambda$, c'est-à-dire $N(A) = \sqrt{\lambda}$.

5) a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Il existe x non nul tel que $u(x) = \lambda x$. On a $\lambda = \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} \in [0, 1]$.

b) Soient u et $v \in \Delta$. Soit $\lambda \in [0, 1]$. Posons $w = \lambda u + (1 - \lambda)v$.

On a $\forall x \in E$, $\langle x, w(x)\rangle = \lambda \langle x, u(x)\rangle + (1 - \lambda) \langle x, v(x)\rangle$.

Comme $0 \leq \langle x, u(x)\rangle \leq \|x\|^2$ et $0 \leq \langle x, v(x)\rangle \leq \|x\|^2$, alors $0 \leq \langle x, w(x)\rangle \leq (\lambda + 1 - \lambda) \|x\|^2 = \|x\|^2$.

Donc $w \in \Delta$, et ainsi Δ est convexe.

6) a) On a $a_{ij} = (E_i \mid AE_j)$. Donc $a_{ii} = (E_i \mid AE_i) \geq 0$.

D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(E_i + tE_j \mid A(E_i + tE_j)) \geq 0$, c'est-à-dire $a_{ii} + 2ta_{ij} + t^2a_{jj} \geq 0$.

Le discriminant de ce polynôme en t est donc ≤ 0, donc $a_{ij}^2 \leq a_{ii}a_{jj}$.

Remarque : Si A était définie positive, on pourrait appliquer directement Cauchy-Schwarz.

En fait, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour toute forme bilinéaire symétrique positive.

b) Soit $X = (x_i)_{i\in J} \in \mathbb{R}^p$. On pose X' définie par $x'_i = x_i$ si $i \in J$ et 0 sinon.

Alors $(X \mid BX) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_ix_j = (X' \mid AX')$, donc $(X \mid BX) \geq 0$.

Remarque : On retrouve alors a) en considérant les sous-matrices positives diagonales d'ordres 1 et 2.

7) a) Comme A est symétrique définie positive, $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.

On a $\langle X, MY\rangle = (X \mid AMY) = (X \mid BY)$.

Comme B est symétrique, $(X \mid BY) = (BX \mid Y)$, donc M est symétrique pour $\langle\ ,\ \rangle$.

b) $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire car $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

L'endomorphisme M est auto-adjoint pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, donc est diagonalisable.

c) En termes de $\langle\ ,\ \rangle$, les propriétés demandées s'écrivent aussi $\langle Z_i, Z_j\rangle = \delta_{ij}$ et $\langle Z_i, MZ_j\rangle = \lambda_j\delta_{ij}$.

Or, par le th spectral M est diagonalisable dans une BON $(Z_1, ..., Z_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pour $\langle\ ,\ \rangle$.

Comme $(Z_1, ..., Z_n)$ est orthonormée, on a $\langle Z_i, Z_j\rangle = \delta_{ij}$, et $MZ_j = \lambda_jZ_j$, donc $\langle Z_i, MZ_j\rangle = \lambda_j\delta_{ij}$.

Remarque : Avec $P = (Z_1, ..., Z_n)$, on a ainsi $P^T AP = I_n$ et $P^T BP = D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

8) a) Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $U = (U_1, ..., U_n) \in O_n(\mathbb{R})$ composée de vecteurs propres de A. Quitte à changer U_1 en $-U_1$ (qui reste un vecteur propre), on a $U \in O_n^+(\mathbb{R})$.

Donc $U^{-1}AU = D$ diagonale.

b) (i) $O_2^+(\mathbb{R})$ est commutatif, donc si $U \in O_2^+(\mathbb{R})$, on a $U^{-1}RU = U^{-1}UR = R$.

(ii) Posons $A = U^{-1}RU$. On a $A \in O_2(\mathbb{R})$ comme produit de matrices orthogonales.

De plus, $\det A = \det R$ et $\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, R$, donc (vu les matrices de rotation $M(\theta)$) on a $A = R$ ou $A = R'$.

Réciproquement, on a $R' = U^{-1}RU$ en prenant $U = \mathrm{Diag}(-1, 1) \in O_2(\mathbb{R})$.

9) a) On a $P(XZ = x) = P(XZ = x \mid Z = 1)P(Z = 1) + P(XZ = x \mid Z = -1)P(Z = -1)$.

On a $\begin{cases} P(XZ = x \mid Z = 1) = P(X = x \mid Z = 1) = P(X = x) \text{ car } X \text{ et } Z \text{ sont indépendantes} \\ P(XZ = x \mid Z = -1) = P(X = -x \mid Z = -1) = P(X = -x) \text{ car } X \text{ et } Z \text{ sont indépendantes} \end{cases}$

On en déduit $P(XZ = x) = \frac{1}{2}P(X = x) + \frac{1}{2}P(X = -x) = P(X = x)$, car X est symétrique.

b) On a à nouveau $P(XZ = x, YZ = y) = \frac{1}{2}P(XZ = x, YZ = y \mid Z = 1) + \frac{1}{2}P(XZ = x, YZ = y \mid Z = -1)$.

Donc $P(XZ = x, YZ = y) = \frac{1}{2}P(X = x, Y = y \mid Z = 1) + \frac{1}{2}P(X = -x, Y = -y \mid Z = -1)$.

Comme Z indépendante de (X, Y), on a $P(X = x, Y = y \mid Z = 1) = P(X = x, Y = y)$.

Comme X et Y sont indépendantes, $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

De même, $P(XZ = x, YZ = y \mid Z = -1) = P(X = -x, Y = -y) = P(X = x)P(Y = y)$.

On en conclut que $P(XZ = x, YZ = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Par a), on conclut $P(XZ = x, YZ = y) = P(XZ = x)P(YZ = y)$. Donc XZ et YZ sont indépendantes.

10) Comme X et Y sont indépendantes, la loi de (X, Y) ne dépend que des lois marginales de X et Y.

Comme X et Y ont même loi et sont indépendantes, alors (X, Y) et (Y, X) ont même loi.

Il en est donc de même de $f(X, Y)$ et $f(Y, X)$ pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

On conclut en considérant $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}$.

11) Considérons $A : \exists n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = 0$. On a $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X_n = 0)$.

On a $\overline{A} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (X_n \neq 0)$. Par indépendance et continuité décroissante, $P(\overline{A}) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$.

On a $\sum \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ diverge vers $-\infty$, car $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \sim \dfrac{1}{n}$. Donc $P(\overline{A}) = \exp(-\infty) = 0$.

Remarque : En fait, on a aussi ici $\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{k}{k+1} = \dfrac{1}{n+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

12) On considère $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |a^n b^m|\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(|a^n| \sum_{m=0}^{+\infty} |b^m|\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a^n|\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |b^m|\right)$.

Comme $\sum a^n$ et $\sum b^m$ converge, alors la famille est sommable, c'est-à-dire $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} |a^n b^m| < +\infty$.

On a alors $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} a^n b^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a^n b^m\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b^m\right) = \dfrac{1}{1-a} \dfrac{1}{1-b}$.

13) a) On a $A_\varepsilon = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geq p} (X_n \in [-\varepsilon, \varepsilon])\right)$, donc A_ε est un événement.

b) On a $B = \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$, mais il ne s'agit pas d'une intersection au plus dénombrable d'événements.

C'est pourquoi on se limite aux $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. On a $B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_{1/k}$, donc B est un événement.