Interrogation n°11. *Barème sur 23 pts ; algèbre : exos 1-8 , probas : exos 9-13*

1) [0.5 pt] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose A orthosemblable à une matrice symétrique S. Montrer que A est symétrique.

2) [1.5 pt] Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A$ et $A^3 = A$.

3) [1.5 pt] Soit $u \in S(E)$ tel que $\operatorname{tr} u = 0$. On note $\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u.

En utilisant le théorème spectral, expliciter un vecteur $x \in E$ non nul tel que $\langle x, u(x) \rangle = 0$.

4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ du psc $(\ \mid\ )$ et on note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

a) [1 pt] Montrer que $A^T A$ est une matrice symétrique positive.

b) [1 pt] On note λ la plus grande valeur propre de $A^T A$.

On pose $N(A) = \sup_{X \neq 0} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$. Exprimer *sans justification* $N(A)$ en fonction de λ.

5) Soient E un espace euclidien. On note Δ l'ensemble des $u \in S(E)$ tels que

$$\forall x \in E, \qquad 0 \leq \langle x, u(x) \rangle \leq \|x\|^2$$

a) [0.5 pt] Soit $u \in \Delta$. Montrer que $\operatorname{Sp}(u) \subset [0, 1]$.

b) [1.5 pt] Montrer que Δ est une partie convexe de $S(E)$.

6) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in S_n(\mathbb{R})$. On note $(E_1, ..., E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

La forme bilinéaire symétrique φ associée est $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$,

$$\varphi(X, Y) = (X \mid AY) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

On suppose $\boxed{A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in S_n^+(\mathbb{R})}$, c'est-à-dire $\forall X,\ (X \mid AX) \geq 0$.

a) [2 pts] Montrer que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\boxed{a_{ii} \geq 0}$ et que $\boxed{a_{ij}^2 \leq a_{ii} a_{jj}}$.

Indication : Utiliser $(X \mid AX)$, avec $X = E_i + tE_j$ pour $t \in \mathbb{R}$.

b) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Soit $J \subset [\![1, n]\!]$ de cardinal p. On note B la sous-matrice carrée $(a_{ij})_{(i,j) \in J \times J}$ d'ordre p.

Montrer que $B \in S_p^+(\mathbb{R})$.

Indication : Exprimer $(X \mid BX)$ sous la forme $(X' \mid AX')$, où on exprimera X' en fonction de X.

7) Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques, avec A définie positive.

Ainsi, les valeurs propres de A sont sont strictement positives.

a) [1 pt] On note $(\ \mid\ )$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$.

On définit $\langle X, Y \rangle = (X \mid AY)$ et on pose $M = A^{-1}B$. Montrer que $\langle X, MY \rangle = \langle MX, Y \rangle$.

b) [1 pt] En déduire que la matrice $A^{-1}B$ est diagonalisable.

c) [1 pt] (★) En utilisant $\langle\ ,\ \rangle$, montrer qu'il existe une base $(Z_1, ..., Z_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad (Z_i \mid AZ_j) = \delta_{ij} \ \text{ et } \ (Z_i \mid BZ_j) = \lambda_j \delta_{ij}$$

8) On dit que deux matrices A et B sont *orthosemblables* ssi $\exists U \in O_n(\mathbb{R}),\ B = U^{-1}AU$.

On dit que deux matrices A et B sont *directement orthosemblables* ssi $\exists U \in O_n^+(\mathbb{R}),\ B = U^{-1}AU$.

a) [1.5 pt] Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est *directement orthosemblable* à une matrice diagonale.

b) On considère les matrices de rotation $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $R' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) [1 pt] En utilisant une propriété de $O_2^+(\mathbb{R})$, justifier que R n'est *directement orthosemblable* qu'à elle-même.

(ii) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Justifier que les seules matrices *orthosemblables* à R sont les matrices R et R'.

9) On dit qu'une variable aléatoire réelle X est symétrique ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X = x) = P(X = -x)$.
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles symétriques.
Soit Z une variable alétoire de Rademacher, c'est-à-dire $P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{2}$.
On suppose X, Y, Z mutuellement indépendantes.

a) [1 pt] Montrer que XZ et X ont même loi.

b) [2 pts] Montrer que XZ et YZ sont indépendantes.

10) [1.5 pt] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que les variables aléatoires $\dfrac{X}{X+Y}$ et $\dfrac{Y}{X+Y}$ ont même loi.

Indication : Considérer les variables aléatoires (X, Y) et (Y, X).

11) [1.5 pt] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que :

- les X_n sont mutuellement indépendantes

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi uniforme sur $\{0, 1, 2, ..., n\}$.

Montrer que presque sûrement, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n = 0$.

12) [1 pt] Soient a et $b \in]-1, 1[$.

En utilisant **uniquement** la propriété de sommation par paquets, justifier la relation de Fubini :

$$\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} a^n b^m = \frac{1}{1-a}\frac{1}{1-b}$$

On commencera par justifier que la famille $(a^n b^m)_{(n,m)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

Remarque : On pourra utiliser les sommes de réels positifs $\sum |u_n| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

13) [1 pt] Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs (discrètes) dans $\mathbb{R}$.

En particulier, pour toute partie J de $\mathbb{R}$, $(X_n \in J)$ est un événement.

a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $A_\varepsilon : (\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p,\ \ |X_n| \leq \varepsilon)$ est un événément.

b) ($\bigstar$) En déduire que $B = \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = 0\}$ est un événement.