Interrogation n$^{\circ}$10. Corrigé

1) Comme u et u^{-1} conservent la norme, alors $u(S) = S$. Donc $m = \sup_{y \in S} \ \langle x, y \rangle$.

Par Cauchy-Schwarz, $\forall y \in S$, $\langle x, y \rangle \leq \|x\|$. Il y a égalité pour $y = x / \|x\|$ (lorsque $x \neq \overrightarrow{0}$).

Donc $m = \|x\|$ (immédiat si $x = \overrightarrow{0}$).

2) Le projeté orthogonal y de x sur F est $y = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \ e_k$. On a $\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$

Par Pythagore, on a $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2$.

Donc $\|y\|^2 \leq \|x\|^2$, avec égalité ssi $x = y$, c'est-à-dire $x \in F$.

3) (i) implique (ii) : On considère $x_j = A_j$ dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Comme A est inversible, M est aussi.inversible.

(ii) implique (i) : On considère une BON $\mathcal{B}$ de E. On note $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$.

On a alors $\langle x_i, x_j \rangle = (A_i \mid A_j)$, donc $M = A^T A$.

On a $\operatorname{rg} A \geq \operatorname{rg} M = n$, donc A est inversible.

4) a) Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Alors A^{-1} triangulaire inférieure et $A^{-1} = A^T$, donc A est diagonale.

Comme A est orthogonale, $A = (\pm E_1, ..., \pm E_n)$.

b) Les valeurs propres de A appartiennent à $\{-1, 1\}$, car A conserve la norme, donc les coefficients diagonaux de A valent ± 1. Les A_j étant de norme 1, les coefficients non diagonaux sont nuls. Donc $A_j = \pm E_j$.

c) *Remarque* (autre preuve) : *par récurrence forte sur* j, on montre que $A_j = \pm E_j$.

$A_j \in \operatorname{Vect}(E_1, .., E_j)$ et $A_j \in \operatorname{Vect}(A_1, A_2, ..., A_{j-1})^{\perp} = \operatorname{Vect}(E_1, E_2, ..., E_{j-1})^{\perp}$, donc $A_j = \pm E_j$.

5) a) On a $\left| f(t) g(t) e^{-t} \right| \leq \frac{1}{2}(f^2 + g^2) e^{-t}$, donc $t \longmapsto f(t) g(t) e^{-t}$ est intégrable.

b) On munit E du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t) g(t) \ e^{-t} \ dt$.

P vérifie $(\mathcal{E})$ ssi $P \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp} \cap \mathbb{R}_n[X]$, qui est par dimension une droite de $\mathbb{R}_n[X]$.

Or, toute droite de $\mathbb{R}_n[X]$ contient un unique polynôme unitaire. D'où le résultat.

6) a) On a $q(x) = \langle x, z \rangle z$ donc $d(x, H) = \|q(x)\| = |\langle x, z \rangle|$.

b) On a $x = p(x) + q(x)$ et $y = p(y) + q(y)$, donc $\langle x, y \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle + \langle q(x), q(y) \rangle$.

Donc $\langle p(x), p(y) \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle < 0$ comme somme de deux réels strictement négatifs.

c) Quitte à normaliser les vecteurs, on peut supposer les x_i unitaires.

On considère les porjetés y_i de x_i sur $H = (x_p)^{\perp}$. Par a), $(y_1, ..., y_{p-1})$ est obtusangle dans H.

On conclut par récurrence sur n : par hypothèse de récurrence, $p - 1 \leq (n - 1) + 2$, donc $p \leq n + 2$.

La propriété est immédiate si $n = 1$: pas de triplet obtusangle sur une droite.

7) a) On a $d(x, V)^2 = \sum_{j=1}^{n-p} \langle x, f_j \rangle^2$.

b) On a $\sum_{i=1}^{n} d(e_i, V)^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-p} \langle e_i, f_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{n-p} \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, f_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{n-p} \|e_i\|^2 = \sum_{j=1}^{n-p} 1 = n - p$.

8) $A^2 = I_4$ et A est une transformation orthogonale (les colonnes forment une BON).

Donc A est une symétrie orthogonale (en fait A est symétrique donc les sev propres E_1 et E_{-1} sont orthogonaux).

Il s'agit de la symétrie par rapport à $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_4) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_4, e_2 + e_3)$.

9) a) $\|U - D\|^2 = \|D\|^2 - 2\,\mathrm{tr}(D^T U) + \|U\|^2 = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 - 2\sum_{i=1}^n \mathrm{tr}(DU) + n$, car $D^T = D$ et $U^T U = I_n$.

b) On a $\mathrm{tr}(DU) = \sum_{i=1}^n \lambda_j u_{jj} \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_j|$, car $|u_{jj}| \leq 1$ (les colonnes de U sont unitaires).

Il y a égalité pour $U = \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in O_n(\mathbb{R})$, où $\varepsilon_j = 1$ si $\lambda_j \geq 0$, et $\varepsilon_j = -1$ si $\lambda_j < 0$.

10) a) On a $A = PA'$, où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in O_n(\mathbb{R})$, donc $|\det P| = 1$, d'où $|\det A| = |\det A'|$.

b) On a $b_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \dfrac{\langle a_k, b_j\rangle}{\|b_j\|^2}\, b_j$.

c) Chaque $a_k - b_k$ est aussi combinaison linéaire des a_j, avec $j < k$. Donc $\det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_n) = \det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)$.

En effet, par récurrence sur k, on a $\det_{\mathcal{B}}(a_1, ..., a_n) = \det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_k, a_{k+1}, ..., a_n)$.

d) On considère la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, avec $e_j = \dfrac{b_j}{\|b_j\|}$.

$\det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n)$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\|b_1\|, ..., \|b_n\|)$, donc $\det_{\mathcal{B}}(b_1, ..., b_n) = \|b_1\| ... \|b_n\|$.

Par b), $V(a_1, ..., a_n) = \|b_1\| ... \|b_n\|$. Comme b_k est un projeté orthogonal de a_k, alors $\|b_k\| \leq \|a_k\|$.

11) a) On a $\langle a + b, a - b\rangle = \left\|a^2\right\| - \left\|b^2\right\| = 1$.

b) On a $s^2 = \mathrm{Id}$ et $s(a) = b$ donc $s(b) = a$, donc $a - b \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id})$, c'est-à-dire $a - b \in \mathbb{R}\omega$.

Or, $a - b$ n'est pas nul, donc $\mathbb{R}\omega = \mathbb{R}(a - b)$, et ainsi $H = (a - b)^\perp$.

c) On a $a = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)$. On a $a + b \in H = (a - b)^\perp$.

Donc $s(a) = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b) = b$.

12) $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme biliéaire symétrique pour toute fonction ω.

Elle est positive ssi ω est positive.

Elle est définie positive ssi ω est positive et si $\{x \in [0, 1] \mid \omega(x) > 0\}$ est dense sur $[0, 1]$, c'est-à-dire ssi ω ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide $]a, b[$, avec $a < b$.

En effet, si ω s'annulait sur $]a, b[$, on pourrait trouver une fonction f continue strictement positive sur $]a, b[$ et nulle part ailleurs, et on aurait alors $\int_0^1 f(t)^2 \omega(t)\ dt = 0$.