Interrogation n°9. *Barème sur 24 pts*

1) [2.5 pts] On considère la matrice compagnon $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On **admet** que $P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ est le polynôme caractéristique de A.

a) Montrer *brièvement* que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) \geq n-1$.

b) En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $P(x)$ est scindé à racines simples.

2) a) [0.5 pt] Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer le spectre de A, et en déduire sans justification celui de B.

b) [1.5 pt] Expliciter une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.

c) [1 pt] Expliciter *sans justification* TOUTES les matrices $Q \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}AQ = D$.

Remarque : On peut déduire de a) les matrices Q sans *aucun* calcul supplémentaire.

3) Soit une matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\boxed{A^3 + A = O_n}$.

a) [2.5 pts] En se plaçant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe p et $q \in \mathbb{N}$ tels que $\chi_A(x) = x^p(x^2+1)^q$.

b) [0.5 pt] Montrer que $\operatorname{tr} A = 0$.

4) [2.5 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_p$. On pose $\pi(X) = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$.

Les questions suivantes sont indépendantes. Justifier brièvement vos réponses

a) Expliciter TOUS les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A) = O_n$.

b) Soit $Q(X) = \prod_{k=1}^{r}(X - \mu_k) \in \mathbb{C}[X]$. Donner une CNS pour que la matrice $Q(A)$ soit inversible.

5) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente de rang 1, avec $n \geq 2$.

On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

a) [1 pt] Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O_{n-1} & * \\ \hline O_{1,n-1} & 0 \end{array}\right)$.

b) [2 pts] En déduire que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ et montrer que A est semblable à la matrice canonique $E_{1,n}$.

6) [3 pts] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, dont on note $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres.

Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on note $E_{\lambda_j} = \operatorname{Ker}(u - \lambda_j \operatorname{Id})$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j.

a) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer *brièvement* que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u et v commutent, c'est-à-dire $u \circ v = v \circ u$.

(ii) les E_{λ_j} sont stables par v.

b) Donner *sans justification* TOUTES les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ commutant avec A dans les deux cas :

(i) $A = \text{Diag}(1,2,3)$ (ii) $A = \text{Diag}(1,2,2)$

c) On revient au cas général. Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on pose $m_k = \dim E_{\lambda_k}$.

Donner *sans justification* la dimension de $C(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$.

7) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ une matrice $\boxed{\text{triangulaire supérieure}}$ de coefficients diagonaux $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

On note $u : K^n \to K^n\ X \longmapsto AX$ l'endomorphisme canoniquement associé. On suppose $\boxed{u \text{ diagonalisable}}$.

On considère la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de K^n et l'hyperplan $H = \text{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$.

a) [1 pt] Montrer qu'il existe un vecteur propre z_n de u n'appartenant pas à H. On pose $u(z_n) = \mu z_n$.

b) [0.5 pt] On pose $A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & \lambda_n \end{array}\right)$. Que dire de la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, ..., e_{n-1}, z_n)$?
En déduire que $u(z_n) = \lambda_n z_n$.

c) [1 pt] On veut montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure inversible $P \in GL_n(K)$ telle que

$$P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à B, il existe $Q \in GL_{n-1}(K)$ triangulaire supérieure telle que $Q^{-1}BQ = \text{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$. Donner *sans détailler* une matrice P qui convient.

8) a) [2 pts] Soit A et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que N est nilpotente.

On suppose que $\boxed{NA = O_n}$. Montrer que $A + N$ et A ont même polynôme caractéristique.

Indication : Considérer a et n les endomorphismes associés et se placer dans une base judicieuse.

b) *Question supplémentaire hors-interrogation*

On suppose que $NA = AN$. Montrer que $A + N$ et A ont même polynôme caractéristique.

9) a) [0.5 pt] Soient v et w deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel E de dimension n.

On suppose $v \circ w = 0$. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Ker} w \geq n$.

b) [1 pt] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant le polynôme annulateur $P(X) = (X - \lambda)^2(X - \mu)$, avec $\boxed{\lambda \neq \mu}$.

Montrer que $\operatorname{Ker}((u - \lambda \operatorname{Id})^2) \oplus \operatorname{Ker}(u - \mu \operatorname{Id}) = E$.

c) [1 pt] Soit une matrice $A = \begin{pmatrix} \lambda & * & * \\ 0 & \lambda & * \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$, avec $\lambda \neq \mu$.

Montrer *brièvement* que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, où $\varepsilon \in \{0, 1\}$.