Interrogation n°8. Corrigé

1) On développe selon la première colonne. On obtient $d_n = \lambda d_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & & & \\ 1 & \lambda & 1 & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ & & 1 & \lambda \end{vmatrix}$.

En développant le déterminant d'ordre $(n-1)$ selon la première ligne, on obtient $d_n = \lambda d_{n-1} - d_{n-2}$.

b) On a donc $d_n = 2d_{n-1} - d_{n-2}$ équation de type Fibonacci.

L'équation caractéristique est $z^2 - 2z + 1$ de racine double 1.

Donc d_n est de la forme $(\alpha + \beta n)$. Comme $d_0 = 1$ et $d_1 = 2$, alors $d_n = n + 1$.

2) a) Résulte de $\det(xI_n - A) = \det((xI_n - A)^T) = \det(xI_n - A^T)$.

b) On a $AX = \lambda X$ ssi $A(X + \mu I) = (\lambda + \mu)I$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $\lambda + \mu \in \mathrm{Sp}(A + +\mu I_n)$.

Variante : $\chi_{A+\mu I}(x) = \det((x-\mu)I - A) = \chi_A(x - \mu)$, donc en particulier $\mathrm{Sp}(A + \mu I_n) = \mathrm{Sp}(A) + \mu$.

c) On a $\det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Mais $\det(A^T) = \det A$, donc $\det A = 0$. D'où le résultat.

3) a) On a $u(Kx) = Ku(x)$. Donc $u(D) \subset D$ ssi $u(x) \in D$, c'est-à-dire ssi $\exists\, \lambda \in K,\ u(x) = \lambda x$.

b) les droites $\mathbb{R}(x + ty)$, avec $t \in \mathbb{C}$ sont des droites distinctes incluses dans le plan $\mathrm{Vect}(x, y)$.

c) Il y a un nombre fini de sous-espaces propres.

Donc il existe une infinité de droites stables par u ssi il existe λ tel que $\dim E_\lambda \geq 2$.

4) On ajoute la première colonne aux autres colonnes.

- Les coefficients des $(n-1)$ colonnes obtenues appartiennent à $\{-2, 0, 2\}$.En mettant 2 en facteur, on obtient par linéarité par rapport aux colonnes $\det A = 2^{n-1} \det C$, avec $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

- *Variante* : Les mineurs Δ_{i1} sont la forme $2B$, où B est une matrice d'ordre $(n-1)$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Par la propriété admise, $\det B \in \mathbb{Z}$, et on a par ailleurs $\det(2B) = 2^{n-1} \det B$.

Ainsi, les Δ_{i1} sont divisibles par 2^{n-1}. Donc $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i1} \Delta_{i1}$ est divisible par 2^{n-1}.

Remarque : Pour prouver que le déterminant d'une matrice dans $\mathbb{Z}$ est dans $\mathbb{Z}$, on procède par récurrence en développant selon la première colonne (par exemple).

5) Les $f_j : t \longmapsto \exp(a_j t)$ sont des vecteurs propres de $u : E \to E$ associés à des valeurs propres distinctes. Donc $(f_1, ..., f_n)$ est libre, et les λ_j sont tous nuls.

Variante : En dérivant k fois et en prenant la valeur en $t = 0$, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_j\ a_j^k = 0$.

En prenant $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, on reconnaît un système de Van der Monde inversible.

6) On sait par le cours que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ est libre (donc une base de F).

On a $\forall j \in \mathbb{N}$, $u^j(z) = \lambda_1^j e_1 + ... + \lambda_n^j e_n \in F$.

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(z, u(z), ..., u^{n-1}(z))$ est la matrice $M = (\lambda_i^j)_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j < n}$, de Van der Monde.

Comme les λ_i sont distincts, alors M est inversible, donc $(z, u(z), ..., u^{n-1}(z))$ est une base de F.

7) Le polynôme caractéristique de A vaut $P(x) = (x-1)(x-2)...(x-n)$. Or, réciproquement, toute matrice dont le polynôme caractéristique vaut $P(x)$ est semblable à A, car $P(x)$ est scindé à racines simples.

Donc T est semblable à A ssi T admet $P(x)$ comme polynôme caractéristique, donc ssi les coefficients diagonaux de T sont $1, 2, ..., n$, dans un ordre *arbitraire.*

8) $A' = \begin{pmatrix} 0 & a\mu/\lambda \\ b\lambda/\mu & 0 \end{pmatrix}$, car $\begin{cases} a(e_1) = be_2 \\ a(e_2) = ae_1 \end{cases}$, donc $\begin{cases} a(\lambda e_1) = b\lambda/\mu\ (\mu e_2) \\ a(\mu e_2) = a\mu/\lambda\ (\lambda e_1) \end{cases}$

Avec par exemple $\lambda = 1$ et $\mu = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$, on obtient : A semlebale à $A' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{ab} \\ \sqrt{ab} & 0 \end{pmatrix}$.

9) a) Il s'agit de la matrice triangulaire supérieure stricte $N = (\delta_{i=j-1})_{0\le i\le n, 0\le j\le n} \in \mathcal{M}_{n+1}(K)$.

b) On considère $P \in F$ de degré maximal (existe car F non vide et le degré de P majoré par n).

On pose $r = K_r[X]$. On a donc $F \subset K_r[X]$ par définition de r.

D'autre part, comme F est stable par P, alors tous les $D^k(P) = P^{(k)}$ appartiennent à F.

On en déduit que $\text{Vect}(P, P', P''.,,, P^{(r)}) \subset F$.

Or, il s'agit d'une famille de degrés échelonnés, donc $K_r[X] = \text{Vect}(P, P', P''.,,, P^{(r)})$. Donc $F = K_r[X]$.

c) B est la matrice de D lorsque $n = 2$.

Par isomorphisme $\varphi : K_2[X] \to K^3$, les sev stables sont donc $\{0\}$ et les $\text{Vect}(E_1, ..., E_k)$, où $1 \le k \le 3$.

10) Si $i \ne j$, $\text{tr}(E_{ij}) = 0 \ne 1 = \text{tr}(E_{11})$, donc a fortiori, E_{ij} n'est pas semblable à E_{11}.

Si $i = j$, E_{ii} est semblable à E_{11}.

En effet, on a $E_{ii} = P^{-1}E_{11}P$ où P est la matrice de la transposition σ qui échange 1 et i.

Remarque : De même, pour tout $i \ne j$, la matrice E_{ij} est semblable à la matrice E_{12}, en considérant une permutation σ qui envoie i sur 1 et j sur 2.

11) a) $AE_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n a_{ki}E_{ki}\right) E_{ij} + O = \sum_{k=1}^n a_{ki}E_{kj}$.

b) On prend $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{21}, E_{31}, ..., E_{n1}, E_{12}, ..., E_{n2}, ..., E_{1n}, ..., E_{nn})$.

12) On a $\sin(i+j) = \sin(i)\cos(j) + \cos(i)\sin(j)$. On pose $X = (\cos i)_{1\le i\le n}$ et $Y = (\sin i)_{1\le i\le n}$.

$M = XY^T + YX^T$ est la somme de deux matrices de rang ≤ 1. Donc $\text{rg}\, M \le 2$.

On en déduit que pour $n \ge 3$, M n'est pas inversible, donc $\det M = 0$.

13) a) On a $\det(xA + B) = (\det A)\det(xI_n + A^{-1}B)$. On se ramène ainsi au cas où A vaut I_n.

On a donc $f(x) = (\det A)\chi_M(x)$, où $M = -A^{-1}B$, ce qui permet de conclure.

b) On a $A = PJ_rQ$, donc $\det(xA + B) = (\det P)(\det Q)\det(xJ_r + C)$, où $C = P^{-1}BQ^{-1}$.

On montre par calcul que $\det(xJ_r + C)$ est un polynôme de degré $\le r$.