Interrogation n°8. *Barème sur 22.5 pts*

On note E_{ij} les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(K)$. On rappelle $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

On rappelle que le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.

1) On considère la matrice $A_n = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } |i-j| = 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $d_n = \det(\lambda I_n + A_n) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & & & \\ 1 & \lambda & 1 & & \\ & 1 & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & \lambda \end{vmatrix}$. On a $d_0 = 1$ et $d_1 = \lambda$.

a) [2 pts] Soit $n \geq 2$. Trouver une relation entre d_n, d_{n-1} et d_{n-2}.

b) [1.5 pt] On suppose $\lambda = 2$. Calculer d_n.

2) [2.5 pts] Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A

Les questions sont indépendantes

a) Montrer que A et A^T ont même polynôme caractéristique.

b) Exprimer *sans justification* $\mathrm{Sp}(A + \mu I_n)$ en fonction de $\mathrm{Sp}(A)$.

c) On suppose A antisymétrique c'est-à-dire $A^T = -A$) et on suppose que n est impair.

En utilisant le déterminant, montrer que A n'est pas inversible.

3) [2.5 pts] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomrophisme.

a) Soit un vecteur non nul $x \in E$.

Montrer brièvement que la droite $D = Kx$ est stable par u ssi x est un vecteur propre de u.

b) Soit (x, y) une famille libre de E.

Expliciter *sans justification* une infinité de droites distinctes incluses dans le plan $\mathrm{Vect}(x, y)$.

c) On suppose que E est de dimension finie.

Donner *sans justification* une CNS pour qu'il existe une infinité de droites stables par u.

4) [1.5 pt] Soient un entier $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que si une matrice est à coefficients dans $\mathbb{Z}$, son déterminant appartient à $\mathbb{Z}$.

On suppose A à coefficients dans $\{-1, 1\}$. Montrer que $\det A$ est divisible par 2^{n-1}.

Suggestion : Retrancher la première colonne aux autres.

5) [1 pt] Soient $a_1, ..., a_n$ des nombres complexes distincts.

Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \exp(a_j t) = 0$.

Montrer que tous les λ_j sont nuls.

Indication : Considérer l'endomorphisme $u : E \to E \; y \longmapsto y'$, où $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

On pose aussi $f_j : t \longmapsto \exp(a_j t)$. On a ainsi $f_j \in E$.

6) [1.5 pt] Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs propres de valeurs propres **distinctes** $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

On a ainsi $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$. On pose $\boxed{z = e_1 + ... + e_n}$.

Montrer que $(z, u(z), ..., u^{n-1}(z))$ est une base de $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, ..., e_n)$.

7) [1.5 pt] On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice diagonale $A = \mathrm{Diag}(1, 2, ..., n)$.

Donner *sans justification* TOUTES les matrices $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaires supérieures semblables à A.

8) [1.5 pt] On considère la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $ab > 0$.

On note u l'endomorphisme associé à A et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique.

Expliciter *sans justification* la matrice A' de u dans la base $\mathcal{B}' = (\lambda e_1, \mu e_2)$, avec λ et μ non nuls.

En déduire que A est semblable à une matrice symétrique de la forme $\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}$.

9) On considère l'endomorphisme (opérateur de dérivation)

$$D : K_n[X] \to K_n[X] \qquad P \longmapsto P'$$

a) [0.5 pt] Donner *sans justification* la matrice N de D dans la base $\mathcal{B} = \left(1, X, \dfrac{X^2}{2}, \dfrac{X^3}{6}, ..., \dfrac{X^n}{n!}\right)$.

b) [1.5 pt] Soit F un sous-espace vectoriel de $K_n[X]$ non nul et stable par D.

Montrer qu'il existe $r \in [\![0, n]\!]$ tel que $F = K_r[X]$.

Indication : On pourra considérer un polynôme $P \in F$ de degré maximal.

c) [1 pt] On considère $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$.

Donner *sans justification* les sev stables par l'endomorphisme associé à B.

10) [1.5 pt] On se place dans $\mathcal{M}_n(K)$. Soient i et $j \in [\![1, n]\!]$.

Déterminer une CNS sur (i, j) pour que les matrices E_{11} et E_{ij} soient semblables.

11) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$.

a) [0.5 pt] Exprimer AE_{ij} en fonction des matrices de la base canonique.

b) [1 pt] On considère $B = \begin{pmatrix} \boxed{A} & & & \\ & \boxed{A} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$ diagonale par blocs où les blocs valent A.

On considère $u : \mathcal{M}_n(K) \to \mathcal{M}_n(K)$ définie par $u(M) = AM$.

Expliciter *sans justification* une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = B$.

12) [1 pt] On considère la matrice $M = (\sin(i + j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

En utilisant l'inégalité connue $\mathrm{rg}(A + B) \leq \mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B$, montrer que pour $n \geq 3$, $\det M = 0$.

13) Question supplémentaire. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) On suppose A inversible. Montrer que $f(x) = \det(xA + B)$ est un polynôme en x de degré n.

b) On suppose A de rang r. Montrer que $f(x) = \det(xA + B)$ est un polynôme en x de degré $\leq r$.