Interrogation n°7. Corrigé

1) a) (i) - Posons $g(t,x) = f(t)\ e^{-tx}$. On a $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto g(t,x)$ est C^∞ et $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(t,x) = (-1)^n\ f(t)\ t^n\ e^{-tx}$.

- Les fonctions $t \longmapsto \dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(t,x)$ sont intégrables sur $[0,+\infty[$, car $\forall x > 0$, $t^n\ e^{-tx} = O_{+\infty}(1/t^2)$.

- *Domination* : Pour $a > 0$, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall x \in [a,+\infty[$, $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(t,x) \leq M\ t^n\ e^{-ta} = \varphi(t)$ intégrable.

Donc $L : x \longmapsto \int_0^{+\infty} g(t,x)\ dt$ est bien de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

(ii) L'intégrale est définie pour tout $x > 0$, car $f(t)\ e^{-tx} = O_{+\infty}(e^{-tx})$ et $x > 0$.

Le changement de variable $u = tx$ donne $L(x) = \dfrac{1}{x}J(x)$, où $J(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}\ du$. On a alors :

- $\forall u \geq 0$, $\lim_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u} = f(0)$

- Domination : $\forall x > 0$, $\left|f\left(\dfrac{u}{x}\right)\ e^{-u}\right| \leq Me^{-u} = \varphi(u)$. On a bien φ intégrable sur $[0,+\infty[$,

On en déduit par convergence dominée que $\lim_{x\to+\infty} J(x) = \int_0^{+\infty} f(0)\ e^{-u}\ du = f(0)$.

Comme $f(0) \neq 0$, alors $L(x) \sim \dfrac{f(0)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) On a $\forall t \geq 0$, $|f(t)| \leq Mt$ par l'IAF, donc $f(t)\ e^{-tx} = O_{+\infty}(te^{-xt})$, donc $O_{+\infty}(1/t^2)$. Donc $L(x)$ existe.

Par IPP, $L(x) = \left[-\dfrac{1}{x}f(t)\ e^{-tx}\right]_0^x + \dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} f'(t)\ e^{-tx}\ dt = \dfrac{1}{x}\int_0^{+\infty} f'(t)\ e^{-tx}\ dt$, car $f(t)\ e^{-tx} = O_{+\infty}(t\ e^{-tx})$.

Par a) appliquée à f', on obtient donc $L(x) \sim \dfrac{f'(0)}{x^2}$.

Remarque : *Autre méthode* : $x^2 L(x) = \int_0^{+\infty} xf(\dfrac{u}{x})\ e^{-u}\ du$.

On a $\lim_{x\to+\infty} xf(\dfrac{u}{x})\ e^{-u} = uf'(0)e^{-u}$, car $f(h) \sim hf'(0)$ et on a la domination $\left|xf(\dfrac{u}{x})\ e^{-u}\right| \leq \varphi(u) = Mue^{-u}$.

Donc $\lim_{x\to+\infty} x^2 L(x) = \int_0^{+\infty} uf'(0)e^{-u}\ du = f'(0)\Gamma(2) = f'(0)$.

c) On utilise le changement de variable $\theta = \tan(t)$, avec $t \in [0, \dfrac{\pi}{4}]$. On a $d\theta = (1+\tan^2 t)\ dt$.

On obtient $J(x) = \int_0^{\pi/4}(1+\tan^2 t)\ e^{-xt}\ dt$.

On applique a) à la fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1+\tan^2 t$ si $t \leq \frac{\pi}{4}$, et $f(t) = 0$ si $t > 0$.

Comme f est continue par morceaux, bornée sur $\mathbb{R}^+$ et que $f(0) = 0$, on en conclut que $J(x) \sim \dfrac{1}{x}$.

2) Posons $f_n(x) = (-1)^n e^{-a_k x}$. On a $\int_0^{+\infty} |f_n| = \dfrac{1}{a_n}$ et $\int_0^{+\infty} f_n = \dfrac{(-1)^n}{a_n}$.

- Une condition possible est : $\sum \dfrac{1}{a_n}$ converge. Par le th ITT, f est intégrable et $\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n$.

- Une autre condition possible est : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

$\sum \dfrac{(-1)^n}{a_n}$ et les séries $\sum f_n(x)$ vérifient aussi le CSSA. Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-a_k x}$.

On a $0 \leq S_n(x) \leq e^{-a_0 x} = \varphi(x)$ intégrable. Par cv dominée, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f(x)\ dx$.

3) On a $E = \mathbb{C}Z_1 + ... + \mathbb{C}Z_n = \mathbb{R}Z_1 + \mathbb{R}iZ_1.... + \mathbb{R}Z_n + \mathbb{R}iZ_n$, car $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{B}$ est génératrice.

Supposons $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k Z_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k (iZ_k) = 0$, avec α_k et β_k **réels**..

Alors $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k + i\beta_k)Z_k = 0$, donc les $\alpha_k + i\beta_k$ sont nuls, donc les α_k et β_k sont nuls. Donc $\mathcal{B}$ est libre.

4) Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$. On a $NX = 0$ ssi $\begin{cases} AX_1 + C_2 = 0 \\ BX_2 = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} AX_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ car B inversible.

Donc $\operatorname{Ker} N = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_1 \in \operatorname{Ker} A \right\}$, donc $\operatorname{Ker} N$ et $\operatorname{Ker} A$ sont isomorphes, donc de même dimension.

On en déduit $n - \operatorname{rg} N = p + \operatorname{rg} A$, donc $\operatorname{rg} N = \operatorname{rg} A + (n-p)$.

Remarque : Par le pivot par blocs, on peut montrer que $\operatorname{rg} N = \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} A & O_{p,n-p} \\ \hline O_{n-p,p} & B \end{array} \right)$ car B inversible.

D'où on peut déduire $\operatorname{rg} N = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A + (n-p)$.

5) a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(K)$. b) On a $\operatorname{Im} u = K^2$, car $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

c) Une base de $\operatorname{Ker} u$ est $(\ (X-1)(X-2)\ ,\ (X-1)(X-2)X\ )$.

Donc une base de $\operatorname{Ker} A$ est la famille des vecteurs $(2,-3,1,0), (0,2,-3,1)$.

Autre méthode : On résout $AX = 0$ par la méthode du pivot : on obtient :

$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_1 + 2x_2 = -4x_3 - 8x_4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_2 = -3x_3 - 7x_4 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 6x_4 \\ x_2 = -3x_3 - 7x_4 \end{cases}$

On obtient la base formée des vecteurs $(2,-3,1,0)$ et $(6,-7,0,1)$.

6) a) On a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Par le théorème du rang, $r = \operatorname{rg} u \leq \dim \operatorname{Ker} u = n - r$, donc $2r \leq n$.

b) On sait que u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$, donc $(u(e_1), ..., u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

On pose $(f_1, ..., f_r) = (u(e_1), ..., u(e_r))$, et on complète $(f_1, ..., f_r)$ en une base $(f_1, ..., f_r, f_{r+1}, ..., f_{n-r})$ de $\operatorname{Ker} u$.

On a ainsi $\forall i \in \{1,2,...,r\}$, $u(e_i) = f_i$, et $\forall i \in \{1,2,...,n-r\}$, $u(f_i) = 0$.

On en déduit qu'en prenant $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_r, f_{r+1}, ..., f_{n-r}, e_1, ..., e_r)$, on a bien $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array} \right)$.

7) a) On a : $\operatorname{Im}(u+v) = E$, donc a fortiori $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = E$.

Mais $\operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v) = n$. Donc (par Grassmann), $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont en somme directe.

b) On a $x = u(x) + v(x) \in \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Im} v$.

Donc $u(x)$ est le projeté de x sur $\operatorname{Im} u$ parallèlement à $\operatorname{Im} v$.

Remarque : En particulier, on a $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} v$. On a de même v projection et $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Im} u$.

8) a) La matrice de u dans les bases canoniques est la matrice dont les lignes sont $L_1, ..., L_p$.

Donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(L_1, ..., L_p) = r$.

b) On a (i) ssi u est surjective ssi $\operatorname{rg} u = p$ ssi $r = p$ ssi $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ est libre.

c) On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à $F \oplus S = E$.

On a $\varphi \in G$ ssi $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},1} \varphi$ est de la forme $(0\ 0\ ...\ 0\ \ * * * *)$. Donc $\dim G = \dim S = n - \dim F$.

Variante : Avec $F \oplus S = E$, $\varphi \in \Delta$ est entièrement définie par $\varphi_{|S} \in S^*$, donc $\dim G = \dim S$.

d) On note que $F = \operatorname{Ker} u$, donc $\dim F = n - \operatorname{rg} u = n - r$.

Si $\varphi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$, on a immédiatement $F \subset \operatorname{Ker} \varphi$. Ainsi, $\operatorname{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_p) \subset G$.

D'autre part, $\dim G = n - \dim F = n - (n-r) = r = \operatorname{rg} \varphi_1, ..., \varphi_p)$. D'où $\operatorname{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_p) = G$.

9) a) On sait qu'en appliquant la méthode du pivot sur les lignes de A puis sur les colonnes de A, on peut transformer A en J_r,avec $r = \operatorname{rg} A$. Ici, $r = n$, donc on peut passer de A à I_n par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Autrement dit, on obtient $A = Q I_n P$, avec P et Q produit de matrices élémentaires. D'où le résultat.

b) Si A n'est pas inversible, il en est de même de A^T, et on a $\det A = 0 = \det(A^T)$.

Sinon, par a), on a $A = M_1 ... M_p$ produit de matrices élémentaires. Donc $A^T = M_p^T ... M_1^T$.

On vérifie aisément que pour toute matrice élémentaire M, on a bien $\det M = \det M^T$.

On en déduit que $\det A = \prod_{i=1}^p (\det M_i) = \prod_{i=1}^p (\det M_i^T) = \det A^T$.

10) a) L'hyperplan H admet une équation de la forme $\sum_{k=1}^n a_k x_k = 0$, avec $(a_1, ..., a_n)$ non nul.

Donc $M(t) \in H$ ssi t vérifie $\sum_{k=1}^n a_k t^k = 0$ qui admet au plus n solutions distinctes.

b) Pour tout sev F_j,on peut trouver un hyperplan H_j tel que $F_j \subset H_j$ (cf base incomplète).

Or, par a), $\bigcup_{i=1}^p H_j$ contient au plus np points $M(t)$. Or, les points $M(t)$ sont en nombre infini.

Comme $\bigcup_{i=1}^p F_j \subset \bigcup_{i=1}^p H_j \neq E$, alors on a a fortiori $\bigcup_{i=1}^p F_j \neq E$.

11) a) On considère une base $\mathcal{B}$ de F, et la matrice de cette base dans $\mathcal{C} = (X^n, X^{n-1}, ..., X, 1)$.

On obtient ainsi une matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1,m}(K)$.

En opérant sur les colonnes de A (ce qui ne modifie pas le sev des vecteurs colonnes), on transforme A en une matrice angulaire inférieure de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & \blacksquare & 0 \\ * & * & \blacksquare \\ * & * & * \end{pmatrix}$, avec $\blacksquare \neq 0$.

Les polynômes associés aux vecteurs colonnes obtenus forment une base de F de degrés échelonnés.

b) On peut utiliser a) : Il suffit alors de considérer $Q_1 = P_1$ et $\forall j \geq 2$, $Q_j = P_1 + P_j$.

On a en effet $\text{Vect}(P_1, P_2, ..., P_m) = \text{Vect}(P_1, P_2 + P_1, ..., P_m + P_1)$.

Variante directe : On considère une base $(P_1, P_2, ..., P_m)$ de F, et on peut supposer que $\deg P_1$ est de degré maximum.

On considère alors $Q_1 = P_1$ et $\forall j \geq 2$, $Q_j = \lambda_j P_1 + P_j$, où λ_j est choisi de sorte que $\deg Q_j = \deg P_1$.