Interrogation n°7. *Barème sur 23.5 pts. Durée 1h45mn*

Notations : Tout vecteur $X \in K^n$ est identifié à la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$.

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, on notera aussi A l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A, c'est-à-dire l'application $X \longmapsto AX$ définie de K^p dans K^n.

1) a) [3 pts] Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et bornée. On pose $M = \sup |f|$.

(i) On pose $\forall x > 0$, $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tx}\, dt$. Montrer que L est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

(ii) On suppose de plus que f est continue en 0 et que $f(0) \neq 0$.
Justifier avec soin que $L(x) \sim_{+\infty} \dfrac{f(0)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) [1.5 pt] On suppose $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1, f' bornée, $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On pose $M = \sup |f'|$.
Montrer que $L(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tx}\, dt$ existe pour tout $x > 0$, et déduire de a) que $L(x) \sim_{+\infty} \dfrac{f'(0)}{x^2}$.

c) [1 pt] En utilisant a), déterminer un équivalent de $J(x) = \int_0^1 e^{-x \arctan(\theta)}\, d\theta$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) [2 pts] Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictements positifs telle que la fonciton $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x}$ soit définie et continue sur $]0, +\infty[$.

Proposer *sans justification* deux conditions différentes sur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui garantissent que

$$\sum \frac{(-1)^n}{a_n} \text{ converge et } \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$$

3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme vérifiant $\boxed{u^2 = 0}$. On pose $n = \dim E$ et $r = \operatorname{rg} u$.

a) [1 pt] Comparer (pour l'inclusion) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$. En déduire que $2r \leq n$.

b) [2 pts] On considère un supplémentaire S de $\operatorname{Ker} u$ dans E, et $(e_1, ..., e_r)$ une base de S.

Justifier qu'il existe une base $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_r, ... f_{n-r}, e_1, ..., e_r)$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

4) [1.5 pt] Soit $(Z_1, ..., Z_n)$ une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^n$.

Montrer que $(Z_1, ..., Z_n, iZ_1, ..., iZ_n)$ est une base du $\boxed{\mathbb{R}}$-espace vectoriel $E = \mathbb{C}^n$.

5) On considère l'application linéaire $u : K_3[X] \to K^2 \quad P \longmapsto \begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $K_3[X]$ et $\mathcal{C} = (E_1, E_2)$ la base canonique de K^2.

a) [0.5 pt] Expliciter sans justification $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} u$.

b) [0.5 pt] Expliciter sans justification le sev $\operatorname{Im} u$.

c) [1.5 pt] Proposer une base de $\operatorname{Ker} A$.

6) [1.5 pt] Soit $N = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{n-p,p} & B \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(K)$, avec $A \in \mathcal{M}_p(K)$ et $\boxed{B \in GL_{n-p}(K) \text{ inversible}}$.

a) En révolvant (par blocs) $NX = 0$, comparer $\dim \operatorname{Ker} N$ et $\dim \operatorname{Ker} A$.

b) Exprimer $\operatorname{rg} N$ en fonction de $\operatorname{rg} A$, n et p.

7) [2 pts] Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $u+v = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) = n$.

a) Que vaut $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$? En déduire que $\mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Im}\, v = E$.

b) Montrer que u est la projection sur $\mathrm{Im}\, u$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, v$.

8) On pose $E = K^n$ et on note $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ le sev des formes linéaires sur E.

Soient $\varphi_1, ..., \varphi_p$ des formes linéaires sur E.

On a $\varphi_j : K^n \to K \quad X \longmapsto L_j X$, avec L_j matrice ligne. On pose $r = \mathrm{rg}(\varphi_1, ..., \varphi_p) = \mathrm{rg}(L_1, ..., L_p)$.

On considère l'application linéaire $u : K^n \to K^p \quad x \longmapsto (\varphi_1(x), ..., \varphi_p(x))$.

a) [0.5 pt] Exprimer $\mathrm{rg}\, u$ en fonction de n et r.

b) [1 pt] Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_p) \in K^p$, il existe $x \in E$ tel que $(\varphi_1(x), ..., \varphi_p(x)) = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$.

(ii) La famille $(\varphi_1, ..., \varphi_p)$ est libre.

c) [1 pt] Soit F un sev de E. On pose $G = \{\varphi \in E^* \mid F \subset \mathrm{Ker}\, \varphi\}$. Montrer que $\dim G = n - \dim F$.

d) [0.5 pt] On pose $F = \mathrm{Ker}\, \varphi_1 \cap \mathrm{Ker}\, \varphi_2 \cap ... \cap \mathrm{Ker}\, \varphi_p$. Montrer que $F \subset \mathrm{Ker}\, \varphi$ ssi $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$.

9) a) [0.5 pt] Soit $A \in GL_n(K)$ une matrice inversible.

Montrer (à l'aide du cours) que A est produit de matrices élémentaires.

Remarque : Par exemple, toute matrice $A \in GL_2(K)$ est produit de matrices de transvection, de dilatation ou de permutation, c'est-à-dire de matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) *Question hors-interrogation*

En déduire une preuve de la propriété $\det(A^T) = \det A$.

10) [1 pt] On pose $E = \mathbb{R}^n$ et on considère pour tout $t \in \mathbb{R}$, $M(t) = (t, t^2, ..., t^n) \in \mathbb{R}^n$.

a) Soit H un hyperplan de E. Montrer que $\{t \in \mathbb{R} \mid M(t) \in H\}$ est fini.

b) Montrer que E n'est pas une réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts :

si $F_1, ..., F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E qui sont distincts de E, alors $\bigcup_{i=1}^{p} F_j \neq E$.

11) Soit F un sev de $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $m = \dim F$.

a) [1 pt] Montrer que F admet une base $(P_1, ..., P_m)$ telle que $\deg P_1 > \deg P_2 > ... > \deg P_m$.

b) *Question hors-interrogation*

Montrer que F admet une base $(Q_1, ..., Q_m)$ telle que $\deg Q_1 = \deg Q_2 = ... = \deg Q_m$.