

## Interrogation n°6. Corrigé

**A.1)** Quitte à prolonger  $f$  par 0 sur  $]1, +\infty[$ , on peut supposer  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et **bornée**.

On a alors 
$$L(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx} dt.$$

Le changement de variable  $u = tx$  donne  $\forall x > 0$ ,  $L(x) = \frac{1}{x} J(x)$ , où 
$$J(x) = \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du.$$

Posons  $g(u, x) = f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u}$ . On a alors :

-  $\forall x > 0$ ,  $u \mapsto g(u, x)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$

-  $\forall u \geq 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(u, x) = f(0)$

- *Domination* :  $\forall x > 0$ ,  $|g(u, x)| \leq M e^{-u} = \varphi(u)$ , où  $M = \sup |f|$ . On a bien  $\varphi$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ ,

Par convergence dominée,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} J(x) = \int_0^{+\infty} f(0) e^{-u} du = f(0)$ . Donc  $L(x) \sim \frac{f(0)}{x}$ .

**A.2) Première méthode** (conseillée) : On utilise une IPP : On a  $L(x) = -\frac{f(a)e^{-ax}}{x} + \frac{1}{x} \int_0^a f'(t) e^{-tx} dt$ .

En appliquant 1) à  $f'$ , on a  $\int_0^a f'(t) e^{-tx} dt \sim \frac{f'(0)}{x}$ . Comme  $e^{-ax} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ , on obtient  $L(x) \sim \frac{f'(0)}{x^2}$ .

*Seconde méthode* : On a  $x^2 L(x) = \int_0^{+\infty} x f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$ .

Comme  $f(0) = 0$ , on a  $f(h) \sim f'(0)h$  en  $h = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f\left(\frac{u}{x}\right) = f'(0)$ .

Par l'IAF, on a  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $|f(h)| \leq Mh$ , où  $M = \sup_{[0,1]} |f'|$ . D'où la domination  $\left| x f\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} \right| \leq M e^{-u}$ .

**A.3)** On effectue le changement de variable  $u = \tan t$ , c'est-à-dire  $t = \arctan u$ .

On a arctan bijection  $C^1$  de  $[0, 1[$  sur  $[0, \frac{\pi}{4}[$  et  $dt = \frac{du}{u^2 + 1}$ .

Donc  $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-ux}}{u^2 + 1} du$ , donc par 1) appliqué à  $f(u) = \frac{1}{u^2 + 1}$ , on obtient  $g(x) \sim \frac{1}{x}$ .

**B.1)** Les fonctions  $x \mapsto f(t) e^{-tx}$  sont continues et  $\forall x \geq 0$ ,  $|f(t) e^{-tx}| \leq |f(t)|$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

**B.2)** a) Soit  $x > 0$ . Par IPP,  $\int_0^a f(t) e^{-tx} dt = [F(t) e^{-tx}]_0^a + x \int_0^a F(t) e^{-tx} dt$ .

$F$  converge en  $+\infty$ , donc est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

En faisant tendre  $a$  vers  $+\infty$ , on obtient  $L(x) = 0 + x \int_0^{+\infty} F(t) e^{-tx} dt = x \int_0^{+\infty} F(t) e^{-tx} dt$ .

b) Posons  $g(x, t) = F(t) e^{-tx}$ . On a  $\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) = (-1)^n F(t) t^n e^{-tx}$ .

Soit  $a > 0$ . On a  $|F(t) t^n e^{-tx}| \leq \sup |F| \varphi(t)$ , où  $\varphi(t) = t^n e^{-ta} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$  intégrable sur  $[0, +\infty[$ .

Donc  $L$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ .

c) On a  $\forall x > 0$ ,  $L(x) = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} du$ . On a  $\lim_{x \rightarrow 0} F\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} = \lambda e^{-u}$ , où  $\lambda = \lim_{+\infty} F = \int_0^{+\infty} f(t) dt = L(0)$ .

Et  $\forall x > 0$ ,  $\left| F\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u} \right| \leq M e^{-u}$ , où  $M = \sup |F|$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} L(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-u} du = \lambda = L(0)$ .

Donc  $L$  est continue en 0.

**C.1)** a) La série converge absolument donc converge.

b) Posons  $f_n(x) = (-1)^n e^{-a_n x}$ . On a  $\int_0^{+\infty} |f_n| = \int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{a_n}$ .

Comme  $\sum \frac{1}{a_n}$  converge, alors par le th ITT,  $f$  est intégrable et  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$ .

**C.2)** a) Résulte du CSSA : La suite  $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et tend vers 0.

b) On ne peut pas utiliser le théorème ITT, car la série  $\sum \int_0^{+\infty} e^{-a_k x} dx = \sum \frac{1}{a_n}$  peut diverger.

L'idée est d'appliquer le th de cv dominée aux sommes partielles,  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-a_k x}$ .

Par l'encadrement classique des sommes partielles des séries alternées, on a  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq S_n(x) \leq e^{-a_0 x} = \varphi(x)$ .

Et  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . Par convergence dominée, on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ .

Or, par linéarité,  $\int_0^{+\infty} S_n(x) dx = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-a_k x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{a_k}$ .

Donc par cv dominée,  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} S_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} = \lambda$ .

*Autre méthode* : On utilise la propriété sur les restes des séries alternées :  $|f(x) - S_n(x)| \leq e^{-a_{n+1} x}$ .

Donc  $\left| \int_0^{+\infty} f(x) dx - \int_0^{+\infty} S_n(x) dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x) - S_n(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-a_{n+1} x} dx = \frac{1}{a_{n+1}} \rightarrow 0$ .

On en déduit  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = \lambda$ .

**D.1)** a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $g$  est bornée,  $f(t)g(x-t) = O_{-\infty}(f(t))$  et  $f(t)g(x-t) = O_{+\infty}(f(t))$ .

Comme  $f$  est intégrable, alors par comparaison, il en est de même de  $t \mapsto f(t)g(x-t)$ .

b) - Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'application  $x \mapsto f(t)g(x-t)$  est continue.

- Domination :  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, |f(t)g(x-t)| \leq \varphi(t) = M|f(t)|$ , où  $M = \sup_{\mathbb{R}} |g|$ . Ainsi,  $\varphi$  est intégrable.

On en déduit que  $f * g$  est continue.

c) Par a),  $G_\lambda$  est bien définie. On a  $\forall \lambda > 0, G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda f(\lambda t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g\left(x - \frac{u}{\lambda}\right) du$ .

On fixe  $x$ . On a  $\forall u, \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(u)g\left(x - \frac{u}{\lambda}\right) = f(u)g(x)$ .

Domination :  $\forall \lambda, \left| f(u)g\left(x - \frac{u}{\lambda}\right) \right| \leq M|f(t)|$ , où  $M = \sup_{\mathbb{R}} |g|$ .

On en déduit par convergence dominée que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)g(x) du = g(x)$ .

**D.2)** a) On a  $(f * g)(x) = \int_\alpha^\beta f(t)g(x-t) dt$ , d'où l'existence de  $(f * g)(x)$  comme intégrale sur un segment.

b) Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . On note que  $\forall x \in [a, b], \forall t \in [\alpha, \beta], (x-t) \in [a-\beta, b-\alpha] = V$ .

On a donc  $\forall t \in [\alpha, \beta], |f(t)g(x-t)| \leq \varphi(t)$ , où  $\varphi(t) = |f(t)| \sup_V |g|$ . On a  $\varphi$  intégrable sur  $[\alpha, \beta]$ .

On en déduit que  $f * g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**E.1)** On a :  $\text{Im}(AB) = A(\text{Im } B)$ , donc  $r = \text{rg } B - \dim(\text{Ker } A \cap \text{Im } B)$ .

On a  $\dim(\text{Ker } A \cap \text{Im } B) = -\dim(\text{Ker } A + \text{Im } B) + \dim(\text{Ker } A) + \dim(\text{Im } B)$ .

Ainsi,  $r = \dim(\text{Ker } A + \text{Im } B) - \dim(\text{Ker } A) = \text{rg}(A) + \dim(\text{Ker } A + \text{Im } B) - n$ .

**E.2)** On a  $\max(\dim \text{Ker } A, \text{rg } B) \leq \dim(\text{Ker } A + \text{Im } B) \leq \min(n, \dim \text{Ker } A + \text{rg } B)$ .

On a donc  $\max(0, p+q-n) \leq r \leq \min(p, q)$ .

*Remarque* :

Ces valeurs sont atteintes en prenant  $A$  et  $B$  diagonales avec des coefficients diagonaux dans  $\{0, 1\}$ .

On a au moins  $p+q-n$  valeurs de  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $a_{jj} = b_{jj} = 1$ .

**F.1)** a) On a  $E = \mathbb{C}Z_1 + \dots + \mathbb{C}Z_n = \mathbb{R}Z_1 + \mathbb{R}iZ_1 + \dots + \mathbb{R}Z_n + \mathbb{R}iZ_n$ , car  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ .

Donc la famille  $\mathcal{B}$  est génératrice.

Supposons  $\sum_{k=1}^n \alpha_k Z_k + \sum_{k=1}^n \beta_k (iZ_k) = 0$ , avec  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  réels..

Alors  $\sum_{k=1}^n (\alpha_k + i\beta_k) Z_k = 0$ , donc les  $\alpha_k + i\beta_k$  sont nuls, donc les  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont nuls.

Donc la famille  $\mathcal{B}$  est libre.

b)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = 8$ .

*Remarque* : Une base est  $(E_{11}, iE_{11}, E_{12}, iE_{12}, E_{21}, iE_{21}, E_{22}, iE_{22})$ .

**F.2)** a) On a  $M_j = y_j X$ . Comme il existe  $j$  tel que  $y_j \neq 0$ , alors  $\text{Im } M = K.X$

On a  $MZ = 0$  ssi  $\forall i, \sum_{j=1}^n x_i y_j z_j = 0$  donc ssi  $\sum_{j=1}^n y_j z_j = 0$ , car  $X \neq 0$ . Donc  $\text{Ker } M = \text{Ker}(Y^T)$ .

b) Comme  $\dim \mathcal{M}_n(K) = n^2$ , il suffit de prouver que  $(M_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$  est libre ou génératrice.

Montrons que la famille est génératrice.

Il suffit de prouver que toute matrice canonique  $E_{kl}$  est combinaison linéaire des matrices  $M_{ij}$ .

Or, on a  $E_{kl} = E_k E_l^T = (\sum_{i=1}^n x_i X_i)(\sum_{j=1}^n y_j Y_j)^T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j X_i Y_j^T \in \text{Vect}(M_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ .