Interrogation n°6. Corrigé

1) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc convergente. Donc $\sum(a_{n+1}-a_n)$ converge.

De plus $(a_{n+1}-a_n)\leq 0$, d'où $\sum|a_{n+1}-a_n|$ converge. On conclut avec $e^{in\theta}(a_{n+1}-a_n)=O(|a_{n+1}-a_n|)$.

2) a) On a : $\mathrm{Im}(AB)\subset\mathrm{Im}\,A$.

Et on a : $\mathrm{rg}(AB)=\mathrm{rg}(B)-\dim(\mathrm{Ker}\,A\cap\mathrm{Im}\,B)$, donc $\mathrm{rg}(AB)\leq\mathrm{rg}(B)$.

b) Si $M=XY^T$, alors $\mathrm{rg}\,M\leq\min(\mathrm{rg}\,X,\mathrm{rg}\,Y)\leq 1$. Réciproquement, si $\mathrm{rg}\,M\leq 1$, les colonnes de M sont colinéaires à un même vecteur X, donc de la forme $(y_1X,...,y_nX)$.

3) a) On suppose donc qu'il existe $(\lambda_1,...,\lambda_n)\neq(0,...,0)$ tel que $\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i=\overrightarrow{0}$.
Posons $p=\min\{i\mid\lambda_i=0\}$. Alors $\lambda_p\neq 0$ et $x_p=-\sum_{i=p+1}^n\frac{\lambda_i}{\lambda_p}x_i\in\mathrm{Vect}(x_{p+1},...,x_n)$.

b) On a $\dim E=n+1$. Il suffit de prouver que la famille est libre. Supposons par l'absurde qu'elle est liée.
Alors $(X-a)^k(X-b)^{n-k}$ est c.l des suivants, ce qui est absurde car les suivants étant tous divisibles part $(X-a)^{k+1}$, ce qui donc aussi le cas de $(X-a)^k(X-b)^{n-k}$, ce qui est absurde, car $b\neq a$.

4) a) Pour $x=y+z\in F\oplus G$, on a $u(x)=u(x)+u(y)=v(y)+w(z)$.

On prend donc $u=v\circ p+w\circ q$, qui est bine linéaire car v,w,p,q sont linéaires.

b) Matriciellement, on a $A=\left(\begin{array}{c|c}A_1 & A_2\end{array}\right)$, où $A_1=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{C}}\,v$ et $A_2=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{C}}\,w$.

5) On considère $f(a,t)=\left(1-\dfrac{t^2}{a}\right)^a\omega(t)$ pour $t\in]0,\sqrt{a}]$ et $f_n(t)=0$ si $t>\sqrt{a}$.

On a $\forall t>0$, $\lim_{a\to+\infty}f(a,t)=e^{-t^2}\,\omega(t)$ et $|f_n(t)|\leq\varphi(t)=e^{-t^2}\,|\omega(t)|$, car $a\ln\left(1-\dfrac{t^2}{a}\right)\leq a\left(-\dfrac{t^2}{a}\right)=-t^2$.

φ est intégrable sur $]0,1]$ car $\varphi(t)=O(\omega(t))$ en $t=0^+$, et intégrable sur $[1,+\infty[$ car $\varphi(t)=O_{+\infty}(1/t^2)$.

Par cv dominée, les $t\longmapsto f(a,t)$ et $t\longmapsto e^{-t^2}\omega(t)$ sont intégrables, et $\lim_{a\to+\infty}g(a)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\omega(t)\,dt$.

6) a) Avec le changement de variable $t=u^{1/3}$, on obtient $\lambda=\dfrac{1}{3}\int_0^{+\infty}u^{1/3-1}\exp(-u)\,du=\dfrac{1}{3}\Gamma(\dfrac{1}{3})$.

b) On a $\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(1+t^3)^n}=\dfrac{1}{n^{1/3}}K_n$, avec $K_n=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x^3/n)^n}$.

On a $\forall x>0$, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{(1+x^3/n)^n}=\exp(-x^3)$.

Et par le binôme, $\left(1+\dfrac{x^3}{n}\right)^n\geq 1+x^3$, donc $\left(1+\dfrac{x^3}{n}\right)^{-n}\leq\varphi(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Par convergence dominée, on a donc $\lim_{n\to+\infty}K_n=\int_0^{+\infty}\exp(-x^3)\,dx=\lambda$. On en déduit $I_n\sim\dfrac{\lambda}{n^{1/3}}$.

On a $J_n=2^{-n}\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(1+t^3/2)^n}=2^{-n+1/3}\int_0^{+\infty}\dfrac{du}{(1+u^3)^n}=2^{-n+1/3}\,I_n$, avec $t=2^{1/3}u$, d'où on conclut.

7) a) Soient $x>0$ et $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $\varepsilon>0$, on a, en $t=0$: $\varphi(t)\sim|\ln t|^p\,t^{x-1}=O(t^{x-1-\varepsilon})$.

On peut choisir ε assez petit de sorte que $x-1-\varepsilon>-1$. Par exemple, on peut prendre $\varepsilon=\dfrac{1}{2}x>0$.

Donc $\varphi:t\longmapsto\dfrac{|\ln t|^p\,t^{x-1}}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

b) En posant $g(x,t)=\dfrac{t^{x-1}}{1+t}$, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\dfrac{(\ln t)t^{x-1}}{1+t}$.

Or, pour tout $\alpha > 0$, on a $\forall x \in [\alpha, +\infty[$, $\forall t \in]0, +\infty[$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{|\ln t|\, t^{\alpha-1}}{1+t} = \varphi(t)$.

Par a), φ est intégrable sur $]0,1]$. Ainsi, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ est dominée uniformément en x sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$, avec $\alpha > 0$.

c) L'intégrale converge absolument car $\left|\dfrac{t^{z-1}}{1+t}\right| = \dfrac{t^{(\operatorname{Re} z)-1}}{1+t}$.

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans Ω convergeant vers $z \in \Omega$. Considérons $0 < \alpha < \operatorname{Re} z$.
Pour $n \geq n_0$ assez grand, $\operatorname{Re} z_n \geq \alpha$, donc $\forall n \geq n_0$, $\left|\dfrac{t^{z_n-1}}{1+t}\right| \leq \dfrac{t^{\alpha-1}}{1+t} = \varphi(t)$, avec φ intégrable.
Donc $\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = f(z)$, et par caractérisation séquentielle, f est continue sur Ω.

8) a) Avec le changement de variable $u = nt$, on obtient $\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-nt}\, dt = \dfrac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$.

b) On a $\forall t > 0$, $S(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t - 1} = \dfrac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1-e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t)$, où $f_n(t) = t^{\alpha-1}e^{-nt}$.
Les f_n sont ≥ 0 et la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum \int_0^{+\infty} f_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}$ converge, car $\alpha > 1$.

Par le théorème ITT, on en déduit $\int_0^{+\infty} S(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha} = \Gamma(\alpha)F(\alpha)$.

c) On a $\forall t > 0$, $S(t) = \dfrac{t^{\alpha-1}}{e^t + 1} = \dfrac{t^{\alpha-1}e^{-t}}{1+e^{-t}} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} f_n(t)$, où $f_n(t) = t^{\alpha-1}e^{-nt}$.
On pose $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f_k(t)$. Par les propriétés des séries alternées, on a $0 \leq S_n(t) \leq f_1(t)$.

Comme f_1 est intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

On obtient donc $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(t)\, dt = \int_0^{+\infty} S(t)\, dt$, c'est-à-dire $\int_0^{+\infty} S(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \int_0^{+\infty} f_n = \Gamma(\alpha)G(\alpha)$.

9) a) On considère la fonction de domination $\varphi(u) = \sup_{(x,u)\in[a,b]\times[c,d]} |f(x,u)|$ constante, intégrable sur $[c,d]$.

b) $G(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ est de classe C^1 comme primitive de la fonction continue g définie au a).

$F : x \longmapsto \int_a^x f(t,u)\, dt$ est de classe C^1.

On en déduit que $H : x \longmapsto \int_c^d F(x,u)\, du$ est de classe C^1 : en effet, on considère comme fonction de domination de la dérivée partielle : $\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,u)\right| = |f(x,u)| \leq \varphi(u)$ constante, intégrable sur $[c,d]$.
Et on a $H'(x) = \int_c^d f(x,u)\, du = g(x) = G'(x)$.

c) Donc $G - H$ est constante. Mais, $G(a) = H(a) = 0$. Donc $G(x) = H(b)$, et en particulier, $G(b) = H(b)$.

10) Le théorème de dérivation s'applique pour tout $x > 0$ (car la fonction racine carrée est C^1 sur $]0, +\infty[$.

On a $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = \int_0^1 \dfrac{x}{\sqrt{f(t) + x^2}}\, dt$. Pour le prouver, on peut utiliser la domination : $\dfrac{x}{\sqrt{f(t)+x^2}} \leq \varphi(t) = 1$.

Par convergence dominée, on obtient $\lim_{x\to0, x>0} \varphi'(x) = \int_0^1 \lambda(t)\, dt$, où $\lambda(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } f(t) = 0 \\ 0 \text{ si } f(t) = 0 > 0 \end{cases}$

En effet, on peut prendre à nouveau comme fonction de domination la fonction $\varphi(t) = 1$.

Donc $\lim_{x\to0, x>0} \varphi'(x) = \int_0^s dt = s$.

D'autre part, la fonction φ est continue sur $[0, +\infty[$ (par le même argument qu'à la question 6) a), en se limitant à un segment $x \in [0, a]$).

Par le théorème du prolongement C^1, on en conclut que $\varphi'(0) = s$ et que φ est C^1 sur $[0, 1]$.