Interrogation n^{o}5. Corrigé

1) a) La série $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ diverge (vers $+\infty$), car $\forall n \geq 3$, $\dfrac{\ln n}{n} \geq \dfrac{1}{n}$.

b) La série $\sum \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$ converge par le critère des séries alternées :

$\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)_{n\geq 3}$ tend vers 0 et est décroissante **à partir d'un certain rang**, car $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\ln t}{t}\right) = -\dfrac{\ln t}{t^2} + \dfrac{1}{t^2} \leq 0$ pour $t \geq e$.

c) La série $\sum \dfrac{\ln n}{2^n}$ converge par comparaison, car $\dfrac{\ln n}{2^n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Autre argument : on utilise le critère de D'Alembert, car $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$.

d) La série $\sum \dfrac{1}{n \ln n}$ converge, car $t \longmapsto \dfrac{1}{t \ln t}$ est décroissante et positive, et que $\int \dfrac{dt}{t \ln t} = \ln \ln t$ diverge.

2) On a $a_n \sim \dfrac{1}{n}$, donc $\sum a_n$ diverge.

On a $a_n = \dfrac{1}{n} n^{O(1/n)} = \dfrac{1}{n} \exp\left(O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n}\left(1 + O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)\right) = \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$.

Ainsi, $(-1)^n a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)$, donc $\varepsilon_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

Donc $\sum (-1)^n a_n$ converge comme somme de deux séries convergentes (série alternée et série abs. convergente).

3) a) On a $1 + a_n > 0$, et $\ln(1 + a_n) \sim a_n$.
Comme $\sum a_n$ converge absolument, alors $\sum \ln(1+a_n)$ converge ssi $\sum a_n$ converge.
D'où la CNS : $\alpha > 1$.

b) On a $1 + a_n > 0$, et $\ln(1+a_n) = a_n - \varepsilon_n$, avec $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2} a_n^2$.
La série $\sum a_n$ converge, et $\sum \varepsilon_n$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.
Donc la série $\sum \ln(1+a_n)$ converge ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) On a $1 + i b_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, avec $\rho_n = \sqrt{1 + b_n^2}$ et $\theta_n = \arctan(b_n)$.
On a $P_n = \rho_0 \rho_1 ... \rho_n e^{i(\theta_1 + ... + \theta_n)}$.
Il résulte de a) appliqué avec $\alpha = 4$, que $\prod \rho_n$ converge vers un réel $\rho \in \mathbb{R}^*$.

D'autre part $\theta_n \sim b_n$, donc la série $\sum \theta_n$ converge vers un réel θ.
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} P_n = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$, par continuité de l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad (\rho, \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

4) En prenant $x = u_n$ et $y = u_{n-1}$, on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k\,|u_n - u_{n-1}|$.
Donc par récurrence immédiate, $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|$.

Comme $\sum k^n$ converge, alors par comparaison, la série $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge.

Donc la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge absolument (= ici, en module), c'est-à-dire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Posons $\lambda = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Comme f est lipschiztienne, elle est continue, donc $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lambda)$, d'où $\lambda = f(\lambda)$. D'autre part, si μ est un point fixe, on a $|\lambda - \mu| = |f(\lambda) = f(\mu)| \leq k\,|\lambda - \mu|$, donc $\lambda = \mu$ et λ est l'unique point fixe.

5) a) Avec $v_n = n^{-\alpha} u_n$, on a $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \alpha \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc la série $\sum (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ convergen c'est-à-dire $(\ln v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel μ.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda = e^\mu > 0$. On en conclut $u_n \sim \lambda n^\alpha$.

b) (i) Par Taylor-young, $f(x) = 1 + \alpha x + O(x^2)$, donc $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 + \dfrac{b}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

En particulier, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{u_{n-1}} = a$.
Par a), il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda n^\alpha$, donc par comparaison, $\sum u_n$ converge ssi $\alpha < -1$.
(ii) On a $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
Comme $\alpha < 0$, alors $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} < 1$ pour n assez grand. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir d'un certain rang.
(iii) Par a), il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda n^\alpha$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ssi $\alpha < 0$.

Lorsque $\alpha < 0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et on déduit de ii) qu'on peut appliquer le CSSA, et ainsi $\sum(-1)^n u_n$ converge.

On en déduit la CNS : $\alpha < 0$.

6) a) $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers 0, donc $\sum(-1)^n R_n$ converge pour toute valeur de $\alpha > 1$.

b) Par comparaison entre séries et intégrales, on a $\int_n^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha} \leq R_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha}$.

D'où $R_n \sim \int_n^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$, et ainsi $\sum R_n$ converge ssi $\alpha - 1 > 1$, c'est-à-dire $\alpha > 2$.

7) a) On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = a < 1$, donc $\sum u_n$ converge (absolument) par le critère de D'Alembert.

b) On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1}}{a u_n} = 1 + O(u_n)$, donc $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O(u_n)$.
Comme $\sum u_n$ converge absolument, alors la série $\sum(\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ converge par comparaison.

On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel μ. Donc $u_n \sim \lambda\, a^n$, où $\lambda = e^\mu > 0$.

c) L'intervalle $]0,1[$ est stable par f et sur cet intervalle, $f < \mathrm{Id}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante et converge vers 0, qui est l'unique point fixe de f sur $[0, x_0]$.
On a donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0^+$ et $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{2} + O(x_n)$ et on conclit par a) et b) avec $a = \dfrac{1}{2}$.

8) a) Par récurrence immédiate d'ordre 2, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \geq u_n$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq (1+a^n)u_n$.
Or le produit infini $\prod(1+a^n)$ converge, car $\ln(1+a^n) \sim a^n$.
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $u_1 K$, où $K = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+a^n)$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît, elle converge.

b) On a $R_n = L - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=n}^{+\infty} a^n u_{k-1}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq n_0$ assez grand, on a $\forall k \geq n_0$, $L - \varepsilon \leq u_{k-1} \leq L$.
Donc $\forall n \geq n_0$, $(L-\varepsilon)\sum_{k=n}^{+\infty} a^n \leq \sum_{k=n}^{+\infty} a^n u_{k-1} \leq L \sum_{k=n}^{+\infty} a^n$.
On en conclut $\forall n \geq n_0$, $(L-\varepsilon)\dfrac{a^n}{1-a} \leq R_n \leq L\dfrac{a^n}{1-a}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{R_n}{a^n} = \dfrac{L}{1-a}$.
Variante plus simple :
Par monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_{n-1}\dfrac{a^n}{1-a} \leq R_n \leq L\dfrac{a^n}{1-a}$. Par pincement, $R_n \sim \dfrac{a^n}{1-a}L$.

9) Comme R_n est la somme d'une série alternée, alors $|R_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Donc $\sum R_n$ converge absolument.

On a $\sum_{n=1}^p R_n = \sum_{n=1}^p \left(\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2}\right) = \sum_{n=1}^p \left(\sum_{k=n}^p \dfrac{(-1)^k}{k^2} + R_{p+1}\right)$.

Par Fubini sur les sommes finies, on a $\sum_{n=1}^p \sum_{k=n}^p \dfrac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^p \sum_{n=1}^k \dfrac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^p k \times \dfrac{(-1)^k}{k^2}$.
D'autre part, $\sum_{n=1}^p R_{p+1} = pR_{p+1} = O\left(\dfrac{1}{p}\right)$, car $|R_{p+1}| \leq \dfrac{1}{(p+1)^2}$.
On obtient $\sum_{n=1}^p R_n = \sum_{k=1}^p \dfrac{(-1)^k}{k} + O\left(\dfrac{1}{p}\right)$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2} = \ln 2$.

Variante : On utilise **une transformée d'Abel** : On a $\sum_{n=1}^p R_n = \sum_{n=1}^p n(R_n - R_{n+1}) + pR_{p+1}$.

Comme $\lim_{p\to+\infty} pR_{p+1} = 0$, alors $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(R_n - R_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = \ln 2$.