Interrogation n°5. *Barème sur 24 pts*

On rappelle que :

- le critère de D'Alembert est au programme officiel

- le critère de Raabe-Duhamel et les séries de Bertrand ne sont pas au programme officiel.

En revanche, le critère de D'Alembert est bel et bien au programme.

- La convergence absolue est valable dans $\mathbb{C}$: Si $\sum |z_n|$ converge, alors $\sum z_n$ converge (dans $\mathbb{C}$).

1) [3 pts] Déterminer la nature (convergente ou divergente) de $\sum_{n\geq 2} u_n$ dans les cas suivants :.

a) $\quad u_n = \dfrac{\ln n}{n}$, b) $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$, c) $\quad u_n = \dfrac{\ln n}{2^n}$, d) $\quad u_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

2) [2.5 pts] On suppose $\omega_n = 1 + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $a_n = \dfrac{1}{n^{\omega_n}} = \exp(-\omega_n \ln n)$.

Déterminer avec soin la nature des séries $\sum a_n$ et $\sum (-1)^n a_n$.

3) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \neq -1$. On pose $\boxed{P_n = \prod_{k=1}^{n} (1+z_k)}$.

On dit que le produit infini $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} (1+z_n)$ converge ssi la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une valeur non nulle.

En particulier, si les a_n sont des réels > -1 , alors $\boxed{\prod_{n\in\mathbb{N}^*} (1+a_n) \text{ converge ssi la série } \sum \ln(1+a_n) \text{ converge}}$.

C'est le cas dans les questions suivantes a) et b). Mais pas dans c), car on ne dispose pas du logarithme complexe.

a) [1 pt] On pose $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha > 0$. Donner une CNS sur α pour que $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} (1+a_n)$ converge.

b) [1.5 pt] On pose $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$, avec $\alpha > 0$. Montrer que $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} (1+a_n)$ converge ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

c) [1.5 pt] ($\bigstar$) On pose $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Montrer que $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} (1+ib_n)$ converge (dans $\mathbb{C}^*$).

Indication : Noter que $1 + ib_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, avec $\rho_n = \sqrt{1+b_n^2}$ et $\theta_n = \arctan(b_n)$.

4) [2.5 pts] Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application contractante : il existe $\boxed{k<1}$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer brièvement que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n\,|u_1 - u_0|$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et que $\lambda = \lim_{n\to+\infty} u_n$ est l'unique point fixe de f.

5) a) [1.5 pt] *Preuve de la propriété de Raabe-Duhamel* (propriété hors-programme officiel).

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda n^\alpha$.

Indication : Etudier la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$, où $v_n = n^{-\alpha} u_n$.

b) [2.5 pts] On considère $f : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ $\boxed{\text{de classe } C^2 \text{ et strictement positive}}$.

On suppose $\boxed{f(0) = 1}$ et on pose $\boxed{\alpha = f'(0)}$.

On considère la suite réelle strictement positive $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{k}\right)}$.

(i) Déduire de a) une CNS sur α pour que $\sum u_n$ converge.

(ii) On suppose $\alpha < 0$. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir d'un certain rang.

(iii) Déterminer une CNS sur α pour que $\sum(-1)^n u_n$ converge.

6) Soit $\boxed{\alpha > 1}$. On pose $\boxed{R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}}$. *Les questions a) et b) sont indépendantes.*

a) [1 pt] Déterminer les valeurs de α pour lequelles la série $\sum(-1)^n R_n$ converge.

b) [1.5 pt] En utilisant une intégrale, déterminer les valeurs de α pour lequelles la série $\sum R_n$ converge.

7) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ et $u_{n+1} = au_n + O(u_n^2)$ et $\boxed{a < 1}$.

a) [0.5 pt] Montrer que $\sum u_n$ converge.

b) [1 pt] Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda a^n$.

Indication : Poser $v_n = a^{-n} u_n$ et utiliser $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + O(u_n)$.

c) [1 pt] On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_n^2)$.

En utilisant ce qui précède, montrer avec soin qu'il existe une constante $\lambda > 0$ tel que $x_n \sim \frac{\lambda}{2^n}$.

8) Soit $0 < a < 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + a^n u_{n-1}}$.

a) [1.5 pt] Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} \leq (1 + a^n)u_n$.

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L > 0$.

b) [1.5 pt] (★) On pose $R_n = L - u_n$. Montrer que $R_n \sim \frac{L\ a^n}{1 - a}$.

9) *Question supplémentaire* (★) On considère $\forall n \geq 1,\ R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

Montrer que $\sum R_n$ converge et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} R_n = \ln 2$.