Interrogation n^{o}4. Corrigé

1) L'intégrale est impropre en 0 et en $+\infty$.

- En $+\infty$, $f(t) \sim \dfrac{(\ln t)^2}{t}\ e^{-t} = O_{+\infty}\left(e^{-t}\right)$, donc la fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$.

- En 0^+, $(\ln t)^2 = O\left(\dfrac{1}{t^{1/4}}\right)$, donc $f(t) \sim \dfrac{(\ln t)^2}{\sqrt{t}} = O\left(\dfrac{1}{t^{3/4}}\right)$, donc f est intégrable sur $]0,1[$.

2) L'intégrale est impropre en 1 et en $+\infty$.

- En 1^+, on a $\ln t \sim (t-1)$, donc $f(t) \sim \dfrac{1}{(t-1)^{\alpha+1}}$ et est intégrable ssi $\alpha+1<1$, c'est-à-dire $\alpha<0$.

- En $+\infty$, on a $f(t) \sim \dfrac{1}{(\ln t)\ t^{\alpha+2}}$ intégrable ssi $\alpha+2>1$, c'est-à-dire $\alpha>-1$. En effet :

Si $\alpha \leq -1$, on a pour t assez grand $f(t) \geq \dfrac{1}{(\ln t)\ t}$ et $\int \dfrac{dt}{(\ln t)t} = \ln\ln t + k$, donc f non intégrable.

Si $\alpha > -1$, on a $f(t) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^{\alpha+2}}\right)$, avec $\alpha+2>1$, donc f intégrable.

- On en conclut que f est intégrable ssi $\alpha \in]-1,0[$.

3) On pose $f(t) = \dfrac{(t+1)^{1/3} - t^{1/3}}{t^\alpha}$.

- On a $f(t) \sim \dfrac{1}{t^\alpha}$ en $t=0^+$, donc f est intégrable sur $]0,1]$ ssi $\alpha<1$.

- On a $f(t) \sim \dfrac{1}{3t^{\alpha+2/3}}$ en $t=+\infty$, car $(t+1)^{1/3} = t^{1/3}\left(1+\dfrac{1}{3t}+o\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)$..

Donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$ ssi $\alpha+\dfrac{2}{3}>1$.

- En conclusion, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ ssi $\dfrac{1}{3}<\alpha<1$.

4) On effectue dans $\int_0^x \sin(t^2)\ dt$ le changement de variable $t=\sqrt{u}$.

L'application $u \longmapsto \sqrt{u}$ est une bijection de classe C^1 de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$.

On obtient $\int_0^x \sin(t^2)\ dt = \dfrac{1}{2}\int_0^{x^2} \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\ du$.

Par IPP, $\int_0^y \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\ du = \left[\dfrac{1-\cos(u)}{\sqrt{u}}\right]_{0^+}^y + \dfrac{1}{2}\int_0^y \dfrac{1-\cos(u)}{u^{3/2}}\ du$.

On a $\dfrac{1-\cos(u)}{\sqrt{u}} = O(u^{3/2})$, donc $\int_0^y \dfrac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\ du = \dfrac{1}{2}\int_0^y \dfrac{1-\cos(u)}{u^{3/2}}\ du$.

On a $\dfrac{1-\cos(u)}{u^{3/2}} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{u^{3/2}}\right)$, donc $u \longmapsto \dfrac{1-\cos(u)}{u^{3/2}}$ est intégrable.

Donc il existe $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \sin(t^2)\ dt$, et on a $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\ dt = \dfrac{1}{4}\int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos u}{u^{3/2}}\ du$.

5) Pour tout $\lambda>0$, avec $u=\lambda t$, on obtient $J(\lambda) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{u}\ du = \dfrac{\pi}{2}$.

Pour $\lambda<0$, par imparité de sin, $J(\lambda) = -J(-\lambda) = -\dfrac{\pi}{2}$. Et on a $J(0)=0$.

Attention : Si on effectue le changement de variable $u=\lambda t$ avec $\lambda<0$, on a $u \in]-\infty,0[$.

6) a) Avec $u=t^2$, on a $t\ dt = \dfrac{1}{2}\ du$, donc $J_n = \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^n \exp(-u)\ du = \dfrac{1}{2}\ n!$

b) Par IPP, $K_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^{2n+1}\ t\exp(-t^2)\ dt = \dfrac{1}{2}\left[-t^{2n+1}\ \exp(-t^2)\right]_0^{+\infty} + \dfrac{2n+1}{2}\int_0^{+\infty} t^{2n-1}\ \exp(-t^2)\ dt$.

Donc $K_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2} I_n$.

c) On en déduit $K_n = \dfrac{1 \times 3 \times ... \times (2n+1)}{2^n}\ I_0 = \dfrac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\ (n!)}\ \sqrt{\pi}$.

7) a) $f(x)f'(x) = O_{+\infty}(|f(x)|)$ et $f(x)$ intégrable, donc $x \longmapsto f(x)f'(x)$ est intégrable.

b) On a $\int_0^x 2f(x)f'(x)\ dx = f(x)^2 - f(0)^2$. Par a), il existe donc $L = \lim_{x\to+\infty} f(x)^2$.

Supposons par l'absurde que $L > 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = \sqrt{L}$, c'est-à-dire $|f(x)| \sim \sqrt{L}$.

Or, la fonction constante $\sqrt{L}$ n'est pas intégrable en $+\infty$. Ce qui contredit f intégrable. D'où $L = 0$.

On en conclut $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

8) Par une IPP, $\phi(y) = \left[-\dfrac{\sin u}{u^2}\right]_y^{+\infty} + 2\int_y^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u^3}\ du = \dfrac{\sin y}{y^2} + 2\int_y^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u^3}\ du$.

On a $\left|\int_y^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u^3}\ du\right| \leq \int_y^{+\infty} \left|\dfrac{\cos u}{u^3}\right|\ du \leq \int_y^{+\infty} \dfrac{1}{u^3}\ du = \left[-\dfrac{1}{2u^2}\right]_y^{+\infty} = \dfrac{1}{2y^2}$.

Donc $\phi(y) \leq \left|\dfrac{\sin y}{y^2}\right| + 2\left|\int_y^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u^3}\ du\right| \leq \dfrac{2}{y^2}$. On en déduit a fortiori $\phi(y) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$.

9) a) **L'argument le plus simple** : $\sin\left(\dfrac{1}{t}\right) = O(1)$ en $t = 0^+$, donc $t \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ est intégrable.

Autre preuve (qui sert au b)) : Avec $u = \dfrac{1}{t}$, on a $F(x) = \int_1^{1/x} \dfrac{\sin u}{u^2}\ du$.

Or, $\dfrac{\sin u}{u^2} = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$, donc $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u^2}\ du$ converge, donc F converge en 0^+.

b) On a $F(x) - F(0) = \int_x^0 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\ dt = -\int_{1/x}^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u^2}\ du$.

Par une IPP, on obtient $\int_{1/x}^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u^2}\ du = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2\int_{1/x}^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u^3}\ du$.

Or, $\left|\int_{1/x}^{+\infty} \dfrac{\cos u}{u^3}\ du\right| \leq \int_{1/x}^{+\infty} \dfrac{1}{u^2}\ du = x^2$.

Donc $F(x) = F(0) + O(x^2)$, et a fortiori.$F(x) = F(0) + \mathfrak{o}\,(x)$, donc $F'(0)$ existe et vaut 0.

Remarque : Mais $\forall x > 0$, $F'(x) = -\sin(\dfrac{1}{x})$ n'a pas de limite en 0.

Donc F est dérivable sur $[0,1]$ mais n'est pas de classe C^1.

10) a) L'intégrale existe car $\dfrac{e^{-t}}{t} = O_{+\infty}(e^{-t})$. Notons G une primitive de $g : t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$.

On a donc $f(x) = \lim_{+\infty} G - G(x)$, donc f est de classe C^1, et $f'(x) = -g(x) = -\dfrac{e^{-t}}{t}$.

b) On a $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}\ dt \leq \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{tx}\ dt = \dfrac{1}{x}\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{tx}\ dt = \dfrac{f(x)}{x}$.

Par IPP, on a $f(x) = \left[-\dfrac{e^{-t}}{t}\right] - g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x} - g(x)$, où $g(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}\ dt$.

Or, on a $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}\ dt = \dfrac{1}{x} f(x)$, donc $g(x) = \mathfrak{o}_{+\infty}(f(x))$. D'où $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

c) Par IPP, on a $f(x) = \left[\ln(t)e^{-t}\right]_x^{+\infty} - g(x) = -\ln(x)\ e^{-x}$, où $g(x) = \int_x^{+\infty} \ln(t)e^{-t}\ dt$.

g admet une limite en 0^+, car $\ln(t)e^{-t} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ intégrable en 0^+.

Donc $f(x) = -\ln(x)\ e^{-x} + O(1)$, d'où on déduit $f(x) \sim -\ln(x)$.

11) Soit $1 < \alpha < \lambda$. Il existe $x_0 \in [0, +\infty[$ tel que $\forall x \geq x_0$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leq -\dfrac{\alpha}{x}$.

En intégrant sur $[x_0, x]$, on obtient $\forall x \geq x_0$, $\ln f(x) - \ln f(x_0) \leq -\alpha(\ln x - \ln x_0)$.

Donc $\forall x \geq x_0$, $f(x) \leq \dfrac{K}{x^\alpha}$, où $K = \dfrac{f(x_0)}{x_0^\alpha}$. Par comparaison sachant que $\alpha > 1$, f est intégrable.

Remarque : $f(x)$ n'est pas nécessairement équivalente à $\dfrac{1}{x^\lambda}$ en $+\infty$, par exemple avec $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^\lambda}$.