Interrogation n°4. *Barème sur 24.5 pts*

1) [2 pts] On considère la fonction f définie $\boxed{\text{sur }]0,+\infty[}$ par $f(t) = \dfrac{(\ln t)^2\ e^{-t}}{\sqrt{t+t^2}}$.

Justifier que f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2) [3 pts] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la fonction f définie $\boxed{\text{sur }]1,+\infty[}$ par $f(t) = \dfrac{1}{(\ln t)\ (t-1)^\alpha\ t^2}$.

Déterminer, en justifiant *avec soin* votre réponse, une CNS sur α pour que f soit intégrable sur $]1,+\infty[$.

3) [1.5 pt] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $\forall t > 0,\ f(t) = \dfrac{(t+1)^{1/3} - t^{1/3}}{t^\alpha}$.

Donner *sans justification détaillée* les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

4) [3 pts] Justifier *avec soin* l'existence de $L = \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\ dt$ et que $L = \dfrac{1}{4} \int_0^{+\infty} \dfrac{1-\cos t}{t^{3/2}}\ dt$.

5) [1 pt] On admet $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\ dt = \dfrac{\pi}{2}$. Donner la valeur de $J(\lambda) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(\lambda t)}{t}\ dt$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{+\infty} t^{2n+1} \exp(-t^2)\ dt$ et $K_n = \int_0^{+\infty} t^{2n} \exp(-t^2)\ dt$.

a) [1 pt] En utilisant un changement de variable simple, donner *sans justification* la valeur de J_n .

b) [1 pt] Trouver une relation entre K_{n+1} et K_n.

c) [0.5 pt] On donne $K_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire *sans justification* la valeur de K_n (à l'aide de factorielles).

7) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose $\boxed{f \text{ intégrable et } f' \text{ bornée}}$.

a) [1 pt] Montrer que $x \longmapsto f(x)f'(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

b) [1.5 pt] En déduire que f converge vers 0 en $+\infty$.

8) [1.5 pt] Soit $y > 0$. On pose $\phi(y) = \int_y^{+\infty} \dfrac{\sin u}{u^2}\ du$. Montrer que $\phi(y) = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$.

9) a) [1 pt] On pose $\forall x \in]0,1]$, $\boxed{F(x) = \int_x^1 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\ dt}$.

Montrer l'existence de $\int_0^1 \sin\left(\dfrac{1}{t}\right)\ dt$, c'est-à-dire de $L = \lim_{x\to 0, x>0} F(x)$.

On peut donc prolonger par continuité F en 0, avec $F(0) = L$. On obtient ainsi $F : [0,1] \to \mathbb{R}$.

b) [1.5 pt] (★) Montrer que F est dérivable en 0.

10) On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\forall x > 0$, $\boxed{f(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}\ dt}$.

a) [1 pt] Montrer que f est de classe C^1 et expliciter $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

b) [1.5 pt] Montrer que $\int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t^2}\ dt \leq \dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire que $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

c) [1 pt] (★) Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $x = 0^+$.

11) [1.5 pt] (★) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 et strictement positive.

On suppose qu'il existe $\lambda > 1$ tel que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \sim_{+\infty} -\dfrac{\lambda}{x}$. Montrer que f est intégrable sur $[0,+\infty[$.