Interrogation n°3. Corrigé

1) a) On a $g(u) = (1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \mathfrak{o}\left(u^2\right) = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \mathfrak{o}\left(u^2\right)$.

b) On a $\cos(x) + \ln(1+x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)\right) + \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)\right) = 1 + x - x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)$.

Avec $u = x - x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right) \sim x$, on obtient donc avec a) :

$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)) - \frac{1}{8}x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)$.

2) On a $\forall x > 0,\ f(x) = \ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3x+4\right)$.

- En $+\infty$, on a $f(x) = \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln(x^2) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{3}{x} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

On en déduit $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{2x} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2x} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$. Donc $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}$.

- En 0^+, on a $f(x) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}x\right) - \ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{3}{4}x + \mathfrak{o}\left(x\right)\right)$.

On en déduit $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{3}{4}x + \mathfrak{o}\left(x\right) = \frac{1}{8}x + \mathfrak{o}\left(x\right)$, donc $f(x) \sim \frac{1}{8}x$.

3) a) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\tan'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2$.

b) On a $\frac{n-1}{n+1} = \frac{1-1/n}{1+1/n} = 1 + \frac{2}{n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $\frac{\pi}{4}\frac{n-1}{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Or, par Taylor-Young et par a), $\tan\left(\frac{\pi}{4} + h\right) = 1 + 2h + \mathfrak{o}\left(h\right)$.

Donc $y_n = \left(1 - 2\frac{\pi}{2n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$, et on en conclut $\lim_{n\to+\infty} y_n = e^{-\pi}$.

4) On a $f(x) = \mathfrak{o}\left(x\right)$, donc f dérivable en 0, et $f'(0) = 0$.

$\forall x > 0,\ f'(x) = -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $\lim_{n\to+\infty} f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -1 \neq f'(0)$, donc f' discontinue en 0.

Remarque : Ainsi, on ne peut pas dériver un DL : f admet un DL_1, mais f' n'admet pas de DL_0.

5) a) Par Taylor-Young, on a $f(x) = x - \lambda\frac{x^p}{p!} + \mathfrak{o}\left(x^p\right)$.

On a $f(x) \sim x$ donc $f(x) > 0$ au voisinage de 0^+.

On a aussi $(f(x) - x) \sim -\lambda\frac{x^p}{p!}$, donc $f(x) - x < 0$ au voisinage de 0^+.

Donc $0 < f(x) < x$ au voisinage de 0^+.

b) $\frac{1}{f(x)^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}\left(1 - \lambda\frac{x^{p-1}}{p!} + \mathfrak{o}\left(x^{p-1}\right)\right)^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}\left(1 + \alpha\lambda\frac{x^{p-1}}{p!} + \mathfrak{o}\left(x^{p-1}\right)\right)$.

On en déduit que $\frac{1}{f(x)^\alpha} - \frac{1}{x^\alpha} \sim \frac{\alpha\lambda}{p!}\frac{x^{p-1}}{x^\alpha}$. On prend donc $\alpha = p-1$, et on obtient $\mu = \frac{\alpha\lambda}{p!}$.

c) L'intervalle $]0, a]$ est stable par f. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]0, a]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante, donc converge vers un réel $L \in [0, a]$. Comme f est continue en L, alors $f(L) = L$, donc $L = 0$.

On a alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \mu$, donc par Cesàro, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{u_n^\alpha} = \mu$, c'est-à-dire $u_n \sim \frac{1}{(\mu n)^{1/\alpha}}$.

6) a) On a $P_n'(x) = 3x^2 + 2nx > 0$ sur $]0, +\infty[$. D'autre part, $P_n(0) = -n$ et $\lim_{+\infty} P_n = +\infty$.

Donc P_n est une bijection continue strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[-n, +\infty[$.

D'où l'existence et l'unicité de x_n. De plus, $P_n(1) > 0 > P_n(0)$, donc $x_n \in [0, 1]$.

b) Soit $0 < a < 1$. On a $P_n(1) = 1$ et $P_n(a) = a^3 + n(a^2 - 1) \to -\infty$ lorsque $n \to +\infty$.

Donc pour n assez grand, $P_n(a) < 0$, et comme $P_n(1) > 0$, alors $a < x_n < 1$ pour n assez grand.

Comme a peut être pris arbitrairement proche de 1, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1^-$.

c) On pose $x_n = 1 + \varepsilon_n$. On a $n\varepsilon_n(2 + \varepsilon_n) = -(1 + \varepsilon_n)^3$, donc $2n\varepsilon_n \sim -1$, c'est-à-dire $\varepsilon_n = -\dfrac{1}{2n}$.

Ainsi, $x_n = 1 - \dfrac{1}{2n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

7) Posons $M = \sup(f')$. Toute pente est une dérivée (par le TAF), donc M est un majorant de A.

Toute dérivée est limite de pentes (par définition), donc M est adhérent à A. Donc $\sup A = M$.

8) a) Posons $\delta_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. On a $\delta_n = \dfrac{\beta - \alpha}{n} + \mathfrak{o}\,(\dfrac{1}{n})$, donc $\delta_n \sim \dfrac{\beta - \alpha}{n}$, car $\beta - \alpha > 0$.

Comme deux suites équivalentes ont même signe au voisinage de $+\infty$, alors $\delta_n > 0$ pour $n \geq p$ assez grand.

b) On a $\forall n \geq p$, $\dfrac{a_n}{a_p} \leq \dfrac{b_n}{b_p}$, donc $\forall n \geq p$, $a_n \leq K b_n$, avec $K = \dfrac{a_p}{b_p}$.

Remarque : En prenant $L = \max\left(K, \dfrac{a_0}{b_0}, ..., \dfrac{a_{p-1}}{b_{p-1}}\right)$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq L b_n$.

De façon générale, toute suite bornée à partir d'un certain rang est bornée.

9) a) $\left|\int_a^b f(t)\ dt - (b-a)f(b)\right| = \left|\int_a^b f(t) - f(b)\ dt\right| \leq \int_\alpha^b |f(t) - f(b)|\ dt$.

Par l'IAF, $|f(t) - f(b)| \leq |t - b|\ M$. Donc $\int_\alpha^b |f(t) - f(b)|\ dt \leq \int_\alpha^b |t - b|\ M = \int_\alpha^b (b - t)\ M\ dt$.

On conclut en utilisant $\int_a^b (b - t)\ dt = \int_0^{b-a} u\ du = \dfrac{1}{2}(b - a)^2$.

b) $\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})\ \Delta = \Delta \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \Delta$.

Il y a égalité ssi $\forall k$, $(x_k - x_{k-1}) = \Delta$, c'est-à-dire ssi σ est la subdivision régulière (et dans ce cas, $\Delta = \frac{1}{n}$).

c) Par Chasles, $\int_0^1 f(t)\ dt - S = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\ dt - (x_k - x_{k-1})f(x_k)\right)$.

Par a), $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\ dt - (x_k - x_{k-1})f(x_k)\right| \leq \dfrac{1}{2}(x_k - x_{k-1})^2 M$.

Donc par b), $\left|\int_0^1 f(t)\ dt - S\right| \leq \dfrac{1}{2} M \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \leq \dfrac{1}{2} M\ \Delta$ par b).

Remarque : Ainsi, S converge vers $\int_a^b f$ lorsque $\Delta \to 0$. En réalité, cette propriété est vraie pour *toute* fonction continue par morceaux (mais la majoration précédente ne s'applique plus, bien sûr).

10) On prend $f(x) = \exp((\ln x)^2) = x^{\ln x}$.

On a $x^\alpha = \mathfrak{o}_{+\infty}(x^{\ln x})$, car $\lim_{n\to+\infty} \exp(\alpha \ln x - (\ln x)^2) = \exp(-\infty) = 0$.

Et on a $f(x) = \mathfrak{o}_{+\infty}(\exp(\alpha x))$, car $\lim_{n\to+\infty} \exp((\ln x)^2 - \alpha x) = \exp(-\infty) = 0$.

11) Le cercle Γ cherché admet nécessairement une équation de la forme $x^2 + (y - r)^2 = r^2$, c'est-à-dire $x^2 + y^2 = 2ry$, où r est le rayon du cercle.

On cherche donc $r > 0$ tel que $\forall x \in [-r, r]$, $x^2 + f(x)^2 \geq 2rf(x)$ afin d'être à l'extérieur du cercle Γ.

En effet, ainsi, le graphe de f sera nécessairement situé en-dessous du cercle (sur $[-r, r]$).

Or, $x^2 + f(x)^2 \sim x^2$ et $f(x) \sim \dfrac{1}{2}\lambda x^2$, c'est-à-dire $x^2 + f(x)^2 \sim \dfrac{2}{\lambda} f(x)$.

Il existe donc un voisinage $[-\alpha, \alpha]$ de 0 tel que $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $x^2 + f(x)^2 \geq \dfrac{1}{\lambda} f(x)$.

On prend $r = \min\left(\alpha, \dfrac{1}{2\lambda}\right)$. On a $[-r, r] \subset [-\alpha, \alpha]$, donc $\forall x \in [-r, r]$, $x^2 + f(x)^2 \geq \dfrac{1}{\lambda} f(x) \geq 2rf(x)$.